Differentialgleichungen III

Alex Kaltenbach

30. Januar 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Bochner-Messbarkeit und Bochner-Integrierbarkeit

Wir haben in der kurzen Einführung gesehen, dass Evolutionsprobleme Anlass geben, Funktionen zwischen einem Zeitintervall I und einem Banachraum X zu betrachten. Aus der Lebesgue'schen Integrationstheorie wissen wir, dass eine Funktion auf I mit Werten in $X = \mathbb{R}$ genau dann Lebesgue messbar ist, wenn sie f.ü.[1] Grenzwert einer Folge von einfachen Funktionen ist. Das Lebesgue-Integral nicht-negativer Funktionen kann dann als Grenzwert von Integralen einer geeigneten Folge von einfachen Funktionen definiert werden. Unser erstes Ziel ist, die Lebesgue'sche Integrationstheorie auf Banachraum-wertige Funktionen zu erweitern. In diesem Zusammenhang dient die Approximierbarkeit durch einfache Funktionen als Ausgangspunkt für den Begriff der Bochner-Messbarkeit, die wiederum Ausgangspunkt für die Integrationstheorie Banachraum-wertiger Funktionen ist.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $I \subseteq \mathbb{R}$ immer ein Intervall und mit X, Y und Z, Banachräume ausgestattet mit der Normen $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ und $\|\cdot\|_Z$.

1.1 Bochner-Messbarkeit

Zunächst definieren wir Banachraum-wertige einfache Funktionen.

Definition 1.1 (Einfache Funktionen)

Eine Funktion $s\colon I \to X$ heißt einfach*, falls paar-weise disjunkte, Lebesgue-messbare Mengen $B_i \subseteq I$, $i = 1, \dots, n$, mit endlichem Lebesgue-Maß $\lambda^1(B_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, und Elemente $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, existieren, sodass*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{B_i}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I\,.$$

Die Menge der einfachen Funktionen *auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(I;X)$.*

In Analogie zur Äquivalenz von Lebesgue-Messbarkeit zur f.ü. Approximierbarkeit durch einfache Funktionen definieren wir Bochner-Messbarkeit.

Definition 1.2 (Bochner-Messbarkeit)

Eine Funktion $u\colon I \to X$ heißt Bochner-messbar*, falls eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$ existiert, sodass*[2]

$$s_n(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Die Menge der Bochner-messbaren Funktionen *auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^0(I;X)$.*

[1] Die Abkürzung *f.ü.* steht für *fast überall.*
[2] Die Abkürzung *f.a.* steht für *fast alle.*

Bemerkung 1.3 *(i) Falls $X = \mathbb{R}$, dann ist eine Funktion $u\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann Bochner-messbar, wenn sie Lebesgue-messbar ist, d.h. $\mathcal{L}^0(I) \coloneqq \mathcal{L}^0(I;\mathbb{R})$ entspricht der Menge der Lebesgue-messbaren Funktionen.*

(ii) Bochner-Messbarkeit erzwingt punktweise f.ü. Approximierbarkeit durch einfache Funktionen. Genauer ist jede Bochner-messbare Funktionen Lebesgue–Borel-messbar, wobei die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

Die Definition der Bochner-Messbarkeit (*cf.* Definition 1.2) liefert sofort die folgende Aussage, die wir später für die Definition von Bochner-Integrierbarkeit (*cf.* Definition 1.12) brauchen.

Lemma 1.4 (u Bochner-messbar $\Rightarrow \|u(\cdot)\|$ Lebesgue-messbar)
Falls $u\colon I \to X$ Bochner-messbar ist, dann ist $\|u(\cdot)\|_X\colon I \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar, d.h. $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$ impliziert $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$.

Beweis. Da $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$ (*cf.* Definition 1.2), existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$, sodass

$$s_n(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Weiter sind die Funktionen $\|s_n(\cdot)\|_X\colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, reellwertige einfache Funktionen, d.h. $(\|s_n(\cdot)\|_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;\mathbb{R})$, denn aus

$$s_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} x_i^n \chi_{B_i^n}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I\,,$$

für paar-weise disjunkte, Lebesgue-messbare Mengen $B_i^n \subseteq I$, $i = 1,\dots,k_n$, mit endlichem Lebesgue-Maß $\lambda^1(B_i^n) < \infty$, $i = 1,\dots,k_n$, und Elemente $x_i^n \in X$, $i = 1,\dots,k_n$, folgt, dass

$$\|s_n(t)\|_X = \sum_{i=1}^{k_n} \|x_i^n\|_X \chi_{B_i^n}(t) \quad \text{in } \mathbb{R} \quad \text{für alle } t \in I\,.$$

Außerdem gilt

$$\|s_n(t)\|_X \to \|u(t)\|_X \quad (n \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Daher ist Funktion $\|u(\cdot)\|_X\colon I \to \mathbb{R}$ als f.ü.-Grenzwert einer Folge von einfachen Funktionen selbst Lebesgue-messbar, d.h. $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$. $\square$

Insbesondere ist Bochner–Messbarkeit stabil unter linearen, stetigen Abbildungen.

Lemma 1.5 (u Bochner-messbar & $A\colon X \to Y$ linear+stetig $\Rightarrow A(u(\cdot))$ Bochner-messbar)
Sei $A\colon X \to Y$ ein linearer, stetiger Operator. Dann ist der linear-induzierte Operator *$\mathcal{A}\colon \mathcal{L}^0(I;X) \to \mathcal{L}^0(I;Y)$, für alle $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$ definiert durch*

$$(\mathcal{A}u)(t) \coloneqq A(u(t)) \quad \textit{in } Y \quad \textit{für f.a. } t \in I\,,$$

wohldefiniert und linear.

Beweis. (Übung). $\square$

1.2 Bochner-Integrierbarkeit

Nachdem wir das Analogon für die Lebesgue-Messbarkeit reeller Funktionen für Banachraum-wertige Funktionen eingeführt haben, führen wir als nächstes das Analogon für das Lebesgue-Integral reeller Funktionen für Banachraum-wertige Funktionen ein.

Definition 1.6 (Bochner-Integral von einfachen Funktionen)
Sei $s \in \mathcal{S}(I;X)$, d.h. es existieren paarweise disjunkte, Lebesgue-messbare Mengen $B_i \subseteq I$, $i = 1,\dots,n$, mit endlichem Lebesgue-Maß $\lambda^1(B_i) < \infty$, $i = 1,\dots,n$, und Elemente $x_i \in X$, $i = 1,\dots,n$, sodass

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{B_i}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I\,.$$

Dann ist das Bochner-Integral *von s definiert als*

$$\int_I s(t)\,\mathrm{d}t \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i\,\lambda^1(B_i) \in X\,.$$

Aus der Definition einer einfachen Funktion sowie der Definition des Bochner-Integrals für einfache Funktionen ergibt sich unmittelbar

Korollar 1.7 (Elementare Eigenschaften I)

(i) Wohldefiniert: *Das Bochner-Integral ist wohldefiniert, d.h. ist unabhängig von der Darstellung der einfachen Funktion. Genauer folgt aus*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{B_i}(t) = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{C_j}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I\,,$$

wobei $x_i, y_j \in X$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$, und $B_i, C_j \subseteq I$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$, Lebesgue-messbare Mengen sind mit $\lambda^1(B_i), \lambda^1(C_j)$ für alle $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$ und $B_i \cap B_j = C_i \cap C_j = \emptyset$, falls $i \neq j$, dass

$$\int_I s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\lambda(B_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j\,\lambda(C_j) \quad \text{in } X\,.$$

(ii) Linearität: *Das Bochner-Integral ist linear, d.h. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(I;X)$ gilt, dass*

$$\int_I \{\alpha s_1 + \beta s_2\}(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_I s_1(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_I s_2(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{in } X\,.$$

(iii) Stetigkeit: *Das Bochner-Integral ist stetig, d.h. für alle $s \in \mathcal{S}(I;X)$ gilt, dass*

$$\left\| \int_I s(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \leq \int_I \|s(t)\|_X\,\mathrm{d}t\,,$$

und die rechte Seite ist wohldefiniert als Lebesgue-Integral.

Beweis. (Übung). □

Bemerkung 1.8
Korollar 1.7 zeigt, dass das Bochner-Integral eine lineare, stetige Abbildung von $\mathcal{S}(I;X)$ nach X definiert, d.h.

$$\left(s \mapsto \int_I s(t)\,\mathrm{d}t\right) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(I;X),X)\,.$$

In Analogie zur Äquivalenz von Lebesgue-Integrierbarkeit zur Approximierbarkeit durch einfache Funktionen f.ü. und im Lebesgue-Integral definieren wir Bochner-Integrierbarkeit.

Definition 1.9 (Bochner-Integrierbarkeit und Bochner-Integral)
Eine Funktion $u\colon I\to X$ heißt Bochner-integrierbar, *falls eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{S}(I;X)$ existiert mit*

$$s_n(t)\to u(t) \quad \text{in } X \quad (n\to\infty) \quad \text{für f.a. } t\in I\,, \tag{1.10}$$

$$\int_I \|s_n(t)-u(t)\|_X\,\mathrm{d}t \to 0 \quad (n\to\infty)\,. \tag{1.11}$$

Dann ist das Bochner-Integral *(von $u\colon I\to X$) definiert als der Grenzwert*

$$\int_I u(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty}\int_I s_n(t)\,\mathrm{d}t \in X\,. \tag{1.12}$$

Die Menge der Bochner-integrierbaren Funktionen *auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(I;X)$.*

Bemerkung 1.13 (zur Wohldefiniertheit von Definition 1.9)

(i) Die Forderung (1.10) besagt insbesondere, dass eine Bochner-intergrierbare Funktion $u\colon I\to X$ Bochner-messbar sein muss, d.h. $\mathcal{L}^1(I;X)\subseteq\mathcal{L}^0(I;X)$.

(ii) Die Forderung (1.11) ist sinnvoll, denn nach Lemma 1.4 ist für jedes $n\in\mathbb{N}$ die reellwertige Funktion $(t\mapsto\|s_n(t)-u(t)\|_X)\colon I\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ Lebesgue-messbar und damit ist $\int_I\|s_n(t)-u(t)\|_X\,\mathrm{d}t\in[0,+\infty]$ als Lebesgue-Integral definiert.

(iii) Das Bochner-Integral einer Bochner-integrierbaren Funktion ist wohldefiniert, denn

(iii.a) <u>Existenz:</u> *Falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{S}(I;X)$, sodass (1.10) und (1.11) erfüllt sind. Dann gilt wegen Korollar 1.7(ii),(iii), dass*

$$\begin{aligned}\left\|\int_I s_n(t)-s_k(t)\,\mathrm{d}t\right\|_X &\leq \int_I\|s_n(t)-s_k(t)\|_X\,\mathrm{d}t\\ &\leq \int_I\|s_n(t)-u(t)\|_X\,\mathrm{d}t+\int_I\|u(t)-s_k(t)\|_X\,\mathrm{d}t\\ &\to 0 \quad (n,k\to\infty)\,,\end{aligned}$$

d.h. die Folge $(\int_I s_n(t)\,\mathrm{d}t)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ ist eine Cauchy–Folge. Da X ein Banach–Raum ist, existiert daher ein $x\in X$, sodass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\int_I s_n(t)\,\mathrm{d}t = x \quad \text{in } X\,,$$

existiert. Hier zeigt sich deutlich, warum es nicht nur reicht allgemeine normierte Räume zu betrachten!

(iii.b) Eindeutigkeit: *Das Bochner-Integral einer Bochner-integrierbaren Funktion ist unabhängig von der approximierenden Folge von einfachen Funktionen, denn für zwei Folgen* $(s_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$*, die* (1.10) *und* (1.11) *erfüllen, gilt wegen Korollar 1.7(ii),(iii), dass*

$$\left\| \int_I s_n^1(t) - s_n^2(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \le \int_I \|s_n^1(t) - u(t)\|_X\,\mathrm{d}t + \int_I \|u(t) - s_n^2(t)\|_X\,\mathrm{d}t \\ \to 0 \quad (n \to \infty)\,,$$

und somit folgt (da beide Grenzwerte wegen (iii.a) existieren)

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n^1(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_I u(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{in } X\,.$$

Bemerkung 1.14 (Etwas nützliche Notation)

(i) Für $u \in \mathcal{L}^1(I;X)$ *und eine Lebesgue-messbare Menge* $B \subseteq I$*, definieren wir*

$$\int_B u(t)\,\mathrm{d}t := \int_I u(t)\chi_B(t)\,\mathrm{d}t \in X\,,$$

wobei wir ausnutzen, dass $u\chi_B \in \mathcal{L}^1(I;X)$ *(Übung).*

(ii) Für $u \in \mathcal{L}^1(I;X)$ *und* $(a,b) \subseteq I$*, definieren wir*

$$\int_b^a u(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \in X\,,$$

Ein einfaches Kriterium zum Nachweis von Bochner-Messbarkeit liefert das Bochner-Kriterium.

Satz 1.15 (Bochner-Kriterium)

Für eine Funktion $u\colon I \to X$ *gilt* $u \in \mathcal{L}^1(I;X)$ *genau dann, wenn* $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$ *und* $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^1(I)$*. Insbesondere gilt, dass*

$$\mathcal{L}^1(I;X) = \big\{u \in \mathcal{L}^0(I;X) \mid \|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^1(I)\big\}\,.$$

Bemerkung 1.16

Das Bochner-Kriterium (cf. Satz 1.15) ist Motivation für die Definition von $L^p(I;X)$*.*

Beweis (von Satz 1.15). *Zu '⇒':* Sei $u \in \mathcal{L}^1(I;X)$. Dann gilt nach Bemerkung 1.13(i), dass $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$, und nach Lemma 1.4, dass $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$. Insbesondere existiert nach Definition 1.9 eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$, so dass

$$\int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X\,\mathrm{d}t \to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung denn für hinreichend großes (festes) $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_I \|u(t)\|_X\,\mathrm{d}t \le \underbrace{\int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X\,\mathrm{d}t}_{\to 0 \quad (n\to\infty)} + \underbrace{\int_I \|s_n(t)\|_X\,\mathrm{d}t}_{<\infty} < \infty\,,$$

d.h. $\|u(\cdot)\|_X \in L^1(I)$.

Zu '$\Leftarrow$': Sei $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$ und $\|u(\cdot)\|_X \in L^1(I)$. Laut Definition 1.2 existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$, sodass

$$s_n(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Definieren wir eine weitere Folge von einfachen Funktionen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$ durch

$$k_n(t) \coloneqq s_n(t)\,\chi_{\{\tau\in I\,|\,\|s_n(\tau)\|_X\le 2\|u(\tau)\|_X\}}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I\,,$$

dann gilt:

- $k_n(t) \to u(t)$ in X $(n \to \infty)$ für f.a. $t \in I$.
- $\|k_n(t) - u(t)\|_X \le 3\|u(t)\|_X$ für alle $t \in I$ und $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $\|u(\cdot)\|_X \in L^1(I)$, liefert der Satz über majorisierte Konvergenz von Lebesgue, dass

$$\int_I \|k_n(t) - u(t)\|_X \,\mathrm{d}t \to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Insgesamt gilt also $u \in \mathcal{L}^1(I;X)$. □

Wie in der klassischen Lebesgue-Theorie müssen wir zu Äquivalenzklassen übergehen, um aus $\mathcal{L}^1(I;X)$ zumindest einen normierten Vektorraum machen zu können.

Definition 1.17 (Bochner–Lebesgue-Raum)
Wir definieren den Bochner–Lebesgue-Raum *durch*

$$L^1(I;X) \coloneqq \mathcal{L}^1(I;X)_{/\sim}$$
$$(\textit{sowie } L^0(I;X) \coloneqq \mathcal{L}^0(I;X)_{/\sim})\,,$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben sei durch „Gleichheit fast überall“, d.h.

$$u \sim v \qquad :\Leftrightarrow \quad u(t) = v(t) \qquad \text{in } X \quad \text{für f.a. } t \in I\,,$$

ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_{L^1(I;X)} \coloneqq L^1(I;X) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, für alle $u \in L^1(I;X)$ definiert durch

$$\|u\|_{L^1(I;X)} \coloneqq \int_I \|u(t)\|_X \,\mathrm{d}t\,.$$

Korollar 1.18 (Elementare Eigenschaften II)
(i) $(L^1(I;X), \|\cdot\|_{L^1(I;X)})$ ist ein normierter Vektorraum.
(ii) $\mathcal{S}(I;X)$ liegt dicht in $L^1(I;X)$.

Beweis. *Zu (i).* (Übung).
Zu (ii). Folgt analog zum Beweis der Rückrichtung im Bochner-Kriterium (*cf.* Satz 1.15). □

Die elementaren Eigenschaften des Bochner-Integrals von einfachen Funktionen (*cf.* Korollar 1.7) lassen sich mithilfe des Dichtheitsresultats in Korollar 1.18 auf Bochner-integrierbare Funktionen übertragen.

Korollar 1.19 (Elementare Eigenschaften III)

(i) Linearität: Das Bochner-Integral ist linear, d.h. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *und* $u_1, u_2 \in L^1(I; X)$ *gilt, dass*

$$\int_I \{\alpha u_1 + \beta u_2\}(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_I u_1(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_I u_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(ii) Stetigkeit: Das Bochner-Integral ist stetig, d.h. für alle $u \in L^1(I; X)$ *gilt, dass*

$$\left\| \int_I u(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \leq \int_I \|u(t)\|_X\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweis. Folgt aus Korollar 1.7 zusammen mit Korollar 1.18. □

Bemerkung 1.20

Korollar 1.19 zeigt, dass das Bochner-Integral eine lineare, stetige Abbildung von $L^1(I; X)$ *nach* X *definiert, d.h.*

$$\left(u \mapsto \int_I u(t)\,\mathrm{d}t\right) \in \mathcal{L}(L^1(I; X); X)\,.$$

Satz 1.21 (Linear-induzierter Operator)

Sei $A \colon X \to Y$ *ein linearer, stetiger Operator. Dann ist der* linear-induzierte Operator $\mathcal{A} \colon L^1(I; X) \to L^1(I; Y)$*, für alle* $u \in L^1(I; X)$ *definiert durch*

$$(\mathcal{A}u)(t) := A(u(t)) \qquad \text{in } Y \qquad \text{für f.a. } t \in I\,,$$

wohldefiniert, linear, stetig mit

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^1(I;Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \|u\|_{L^1(I;X)} \qquad \text{für alle } u \in L^1(I; X)\,.$$

Insbesondere gilt

$$A\left(\int_I u(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I (\mathcal{A}u)(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{in } Y \qquad \text{für alle } u \in L^1(I; X)\,,$$

d.h. das Bochner-Integral kommutiert mit linearen, stetigen Abbildungen (cf. Abbildung 1.1).

$$\begin{tikzcd}
L^p(I;X) \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "\int_I \cdot \,\mathrm{d}t"] & L^p(I;Y) \arrow[d, "\int_I \cdot \,\mathrm{d}t"] \\
X \arrow[r, "A"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1.1: Kommutatives Diagramm.

Beweis. *1. Wohldefiniert:* Nach Lemma 1.5 ist der Operator $\mathcal{A}\colon \mathcal{L}^0(I;X) \to \mathcal{L}^0(I;Y)$ wohldefiniert und linear. Es reicht also zu zeigen, dass $\mathcal{A}u \in L^1(I;Y)$ für alle $u \in L^1(I;X)$. Für alle $u \in L^1(I;Y)$ ist $\|(\mathcal{A}u)(\cdot)\|_Y \in L^1(I)$, denn

$$\|(\mathcal{A}u)(t)\|_Y = \|A(u(t))\|_Y \le \|A\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\|u(t)\|_X \quad \text{für f.a. } t \in I\,, \tag{1.22}$$

und $\|u(\cdot)\|_X \in L^1(I)$ laut dem Bochner–Kriterium (*cf.* Satz 1.15). Das Bochner–Kriterium (*cf.* Satz 1.15) liefert dann wiederum, dass $\mathcal{A}u \in L^1(I;Y)$. Schließlich ist der Operator $\mathcal{A}\colon L^1(I;X) \to L^1(I;Y)$ wohldefiniert und linear.

2. Stetigkeit: Integration von (1.22) bezüglich $t \in I$ für alle $u \in L^1(I;X)$ liefert, dass

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^1(I;Y)} \le \|A\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\|u\|_{L^1(I;X)} \quad \text{für alle } u \in L^1(I;X)\,,$$

d.h. $\mathcal{A}\colon L^1(I;X) \to L^1(I;Y)$ ist stetig.

3. Integraldarstellung: Laut Definition 1.12 existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$, sodass

$$s_n \to u \quad L^1(I;X) \quad (n \to \infty)\,.$$

Die Stetigkeit von $\mathcal{A}\colon L^1(I;X) \to L^1(I;Y)$ liefert, dass

$$\mathcal{A}s_n \to \mathcal{A}u \quad \text{in } L^1(I;Y) \quad (n \to \infty)\,,$$

sodass nach der Stetigkeit des Bochner-Integrals (*cf.* Korollar 1.19, Bemerkung 1.20) gilt, dass

$$\int_I (\mathcal{A}s_n)(t)\,\mathrm{d}t \to \int_I (\mathcal{A}u)(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{in } Y \quad (n \to \infty)\,.$$

Wegen der Linearität des Bochner-Integrals (*cf.* Korollar 1.19(i)) gilt, dass

$$A\left(\int_I s_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I (\mathcal{A}s_n)(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{in } Y \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Mit der Stetigkeit des Bochner-Integrals (*cf.* Korollar 1.19, Bemerkung 1.20) und der Stetigkeit von $A\colon X \to Y$ folgt, dass

$$A\left(\int_I s_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \to A\left(\int_I u(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{in } Y \quad (n \to \infty)\,.$$

Die Eindeutigkeit des Grenzwertes liefert schließlich die Behauptung. $\square$

1.3 Klassische Funktionenräume

In diesem Abschnitt führen wir alle *"klassischen"* Funktionenräume ein. Beginnen wir mit den Räumen stetiger Funktionen.

Definition 1.23 (Räume stetiger Funktionen)

(i) Der Raum der stetigen Funktionen auf I mit Werten in X *ist definiert durch*

$$C^0(I;X) \coloneqq \left\{u\colon I \to X \mid u(t+h) \to u(t) \text{ in } X\,(h \to 0, t+h \in I) \text{ für alle } t \in I\right\}.$$

(ii) Der Raum der stetigen, beschränkten Funktionen auf I mit Werten in X *ist definiert durch*

$$C_b^0(I;X) \coloneqq \left\{u \in C^0(I;X) \mid \sup_{t\in I} \|u(t)\|_X < \infty\right\}.$$

Bemerkung 1.24

Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann gilt $C^0(I;X) = C_b^0(I;X)$.

Nachdem wir die Räume stetiger Funktionen eingeführt haben, können wir als Nächstes die Räume (k-mal) stetig differenzierbaren Funktionen einführen.

Definition 1.25 (Räume klassisch differenzierbarer Funktionen)

Eine Funktion $u\colon I \to X$ heißt

(i) klassisch differenzierbar in $t \in I$, *falls ein $x \in X$ existiert, sodass*

$$\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) \to x \quad \text{ in } X \quad (h \to 0, t+h \in I).$$

Wir definieren dann

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \coloneqq x \in X$$

als die klassische Zeitanleitung von u in t.

(ii) klassisch differenzierbar in I, *falls klassisch differenzierbar in t für alle $t \in I$.*

(iii) k-mal klassisch differenzierbar in I, *wobei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls die* i-te klassische Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}t^i} \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}^{i-1} u}{\mathrm{d}t^{i-1}}\right] \colon I \to X$$

für alle $i = 0, \dots, k-1$, wobei $\frac{\mathrm{d}^0 u}{\mathrm{d}t^0} \coloneqq u\colon I \to X$, existiert und in I klassisch differenzierbar ist.

Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, bezeichne dann

$$C^k(I;X) \coloneqq \left\{u \in C^0(I;X) \,\middle|\, \exists \frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}t^i} \in C^0(I;X) \text{ für alle } i = 1, \dots, k\right\},$$

den Raum aller auf I k-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X.

Satz 1.26 (Vollständigkeit von $C_b^0(I;X)$ und $C^k(I;X)$)
(i) $(C_b^0(I;X), \|\cdot\|_{C_b^0(I;X)})$, *wobei*

$$\|u\|_{C_b^0(I;X)} \coloneqq \sup_{t\in I} \|u(t)\|_X \qquad \textit{für alle } u \in C_b^0(I;X)\,,$$

ist ein Banachraum.
(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ *und* $I \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt, ist* $(C^k(I;X), \|\cdot\|_{C^k(I;X)})$, *wobei*

$$\|u\|_{C^k(I;X)} \coloneqq \sum_{i=0}^{k} \left\| \frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}t^i} \right\|_{C_b^0(I;X)} \qquad \textit{für alle } u \in C_b^0(I;X)\,,$$

ein Banachraum.

Beweis. Zu (i). Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_b^0(I;X)$ eine Cauchy-Folge in $C_b^0(I;X)$, d.h.

$$\|u_m - u_n\|_{C_b^0(I;X)} = \sup_{t\in I} \|u_m(t) - u_n(t)\|_X \to 0 \quad (m,n \to \infty)\,.$$

Dann ist $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ für alle $t \in I$ eine Cauchy-Folge in X. Da X ein Banachraum ist, existiert daher zu jedem $t \in I$ ein Element $u_t \in X$, sodass

$$u_n(t) \to u_t \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)\,.$$

Definiere dann die Funktion $u\colon I \to X$ durch

$$u(t) \coloneqq u_t \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I\,.$$

Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass $u \in C_b^0(I;X)$ und $u_n \to u$ in $C_b^0(I;X)$ $(n \to \infty)$:

Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Dann existiert ein $n_0 \coloneqq n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_0$ gilt, dass

$$\|u_m - u_n\|_{C_b^0(I;X)} = \sup_{t\in I} \|u_m(t) - u_n(t)\|_X \leq \varepsilon\,.$$

Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_0$, dass

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|_X \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I\,.$$

Für $m \to \infty$ erhalten wir daraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt, dass

$$\|u(t) - u_n(t)\|_X \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I\,.$$

Bilden wir das Supremum bezüglich $t \in I$, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, dass

$$\sup_{t\in I} \|u(t) - u_n(t)\|_X \leq \varepsilon\,. \tag{1.27}$$

Damit folgt die Behauptung, falls $u \in C_b^0(I;X)$:

Zur Stetigkeit: Wegen (1.27) gilt, dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{\substack{h\to 0\\ t+h\in I}} \|u(t+h)-u(t)\|_X &\le \limsup_{\substack{h\to 0\\ t+h\in I}} \|u(t+h)-u_{n_0}(t+h)\|_X \\
&\quad + \limsup_{\substack{h\to 0\\ t+h\in I}} \|u_{n_0}(t+h)-u_{n_0}(t)\|_X \\
&\quad + \|u_{n_0}(t)-u(t)\|_X \\
&\le \varepsilon + 0 + \varepsilon = 2\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgern wir, dass

$$u(t+h) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (h \to 0, t+h \in I) \quad \text{für alle } t \in I\,,$$

d.h. $u \in C^0(I;X)$.

Zur Beschränktheit: Wegen (1.27) gilt, dass

$$\sup_{t\in I} \|u(t)\|_X \le \underbrace{\sup_{t\in I} \|u(t)-u_{n_0}(t)\|_X}_{\le\varepsilon} + \underbrace{\sup_{t\in I} \|u_{n_0}(t)\|_X}_{<\infty} < \infty\,,$$

d.h. $u \in C_b^0(I;X)$.

Somit ließt sich (1.27) als $u_n \to u$ in $C_b^0(I;X)$ $(n \to \infty)$ und es folgt die Behauptung.

Zu (ii). Folgt aus (i) induktiv mit Hilfe von Bemerkung 1.24 (Übung). □

Proposition 1.28 (Charakterisierung der schwachen Folgenkonvergenz in $C^0(I;X)$)
Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann gilt für eine beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(I;X)$ und eine Funktion $u \in C^0(I;X)$, dass

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } C^0(I;X) \quad (n \to \infty)\,,$$

genau dann, wenn

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I\,.$$

Beweis. Siehe [BT38, Theorem 3]. □

Definition 1.29 (Raum der demi-stetigen Funktionen)
Der Raum der demi-stetigen Funktionen auf I mit Werten in X *ist definiert durch*

$$C_\omega^0(I;X) \coloneqq \big\{u\colon I \to X \mid u(t+h) \rightharpoonup u(t) \text{ in } X \ (h \to 0, t+h \in I) \text{ für alle } t \in I\big\}\,.$$

1.4 Schwache Messbarkeit und Satz von Pettis

Das Bochner-Kriterium (*cf.* Satz 1.15) lieferte uns ein handliches Mittel zum Nachweis der Bochner-Integrierbartkeit. Allerdings müssen wir zum Nachweis der Bochner-Messbarkeit (die Teil des Bochner-Kriteriums ist) immer noch eine Folge von einfachen Funktionen konstruieren, die f.ü. gegen unsere Funktion konvergiert. Das ist in der Praxis zu aufwendig. Abhilfe verschafft uns hier der Satz von Pettis, der Bochner-Messbarkeit äquivalent als schwache Messbarkeit zusammen mit Fast-Separabelwertigkeit charakterisiert; zwei Eigenschaften, die deutlich einfacher nachgewiesen werden können.

Definition 1.30 (Schwache Messbarkeit, Separabelwertigkeit, Fast-Separabelwertigkeit)
Eine Funktion $u\colon I \to X$ heißt

(i) schwach messbar, *falls*

$$\langle f, u(\cdot)\rangle_X \in \mathcal{L}^0(I) \qquad \text{für alle } f \in X^* .$$

(ii) separabelwertig, *falls das Bild von u, d.h.*

$$R(u) \coloneqq \big\{u(t) \in X \mid t \in I\big\} ,$$

separabel ist.

(iii) fast separabelwertig, *falls eine Lebesgue-messbare Menge $B_0 \subseteq I$ mit $\lambda^1(B_0) = 0$ existiert, sodass*

$$R(u_{|I\setminus B_0})$$

separabel ist.

Nun haben wir alle notwendigen Definitionen für den folgenden Satz.

Satz 1.31 (von Pettis, 1938, *cf.* [Pet38])
Eine Funktion $u\colon I \to X$ ist genau dann Bochner-messbar, wenn sie schwach messbar und fast separabelwertig ist.

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Pettis (*cf.* Satz 1.31), welche in der Praxis am leichtesten anzuwenden ist, erhalten wir das folgende Resultat.

Korollar 1.32
Ist X ein separabler Banachraum, dann ist ein Funktion $u\colon I \to X$ ist genau dann Bochner-messbar, wenn sie schwach messbar ist.

Bemerkung 1.33
Da die meisten Banachräume mit denen man es "in der Praxis" zu tun hat separabel sind, ist der Standardweg zur Überprüfung von Bochner-Messbarkeit der Korollar 1.32.

Eine weitere wichtige Folgerung aus dem Satz von Pettis (*cf.* Satz 1.31) ist das folgende Resultat.

Korollar 1.34

Die folgenden Aussagen gelten:

(i) $C^0(I;X) \subseteq \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(I;X) := \{u \in \mathcal{L}^0(I;X) \mid \|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)\}$.

(ii) $C^0_b(I;X) \subseteq \mathcal{L}^1(I;X)$, *falls* $\lambda^1(I) < \infty$.

Beweis. *Zu (i).* Sei $u \in C^0(I;X)$.

1. Bochner-Messbarkeit:

1.1 Schwache Messbarkeit: Da $u \in C^0(I;X)$, gilt

$$\langle f, u(\cdot)\rangle_X \in C^0(\overline{I}) \subseteq \mathcal{L}^0(I) \qquad \text{für alle } f \in X^*\,,$$

d.h. ist u schwach messbar.

1.2 Fast-Separabelwertigkeit: Da I separabel ist und $u \in C^0(I;X)$, ist $R(u)$ separabel, d.h. u ist separabelwertig.

Der Satz von Pettis (*cf.* Satz 1.31) liefert schließlich, dass $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$.

2. Lokale Integrierbarkeit: Für alle kompakten $K \subseteq I$ gilt, dass

$$\|(u|_K)(\cdot)\|_X \in C^0(K) \subseteq \mathcal{L}^1(K)\,,$$

d.h. $u \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$.

Zu (ii). Folgt analog zu (i) (Übung). □

Korollar 1.35

Die folgenden Aussagen gelten:

(i) $C^0_\omega(I;X) \subseteq \mathcal{L}^0(I;X)$.

(ii) Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt ist, dann gilt für alle* $u \in C^0_\omega(I;X)$, *dass* $\sup_{t\in I}\|u(t)\|_X < \infty$.

Beweis. *Zu (i).* Sei $u \in C^0_\omega(I;X)$.

1. Schwache Messbarkeit: Da $u \in C^0_\omega(I;X)$, gilt

$$\langle f, u(\cdot)\rangle_X \in C^0(\overline{I}) \subseteq \mathcal{L}^0(I) \qquad \text{für alle } f \in X^*\,,$$

d.h. ist u schwach messbar.

2. Fast-Separabelwertigkeit: Da I separabel ist und $u \in C^0_\omega(I;X)$, ist $R(u)$ schwach separabel. Da jede schwach separable Teilmenge eines Banachraums auch (stark) separabel ist (*cf.* Satz von Mazur), ist $R(u)$ (stark) separabel, d.h. u ist separabelwertig.

Der Satz von Pettis (*cf.* Satz 1.31) liefert, dass $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$.

Zu (ii). Angenommen es gilt $\sup_{t\in I}\|u(t)\|_X = \infty$. Dann existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$, sodass

$$\|u(t_n)\|_X \to \infty \quad (n\to\infty)\,. \tag{1.36}$$

Da $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und ein Element $t^* \in I$, sodass

$$t_{n_k} \to t^* \quad (k\to\infty)\,.$$

Wegen $u \in C^0_\omega(I;X)$ folgt, dass

$$u(t_{n_k}) \rightharpoonup u(t^*) \quad \text{ in } X \quad (k\to\infty)\,.$$

Da schwach konvergente Folgen beschränkt sind, ist dies ein Widerspruch zu (1.36). □

Korollar 1.37 ($\mathcal{L}^0(I;X)$ abgeschlossen bezüglich f.ü. schwacher Konvergenz)
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^0(I;X)$, sodass

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \textit{ in } X \quad (n\to\infty) \quad \textit{ für f.a. } t\in I\,.$$

Dann gilt $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$.

Beweis. Der Satz von Pettis (*cf.* Satz 1.31) liefert, dass die folgenden Aussagen gelten:
(1) $(\langle f, u_n(\cdot)\rangle_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^0(I)$ für alle $f\in X^*$.
(2) Es existieren Lebesgue-messbare Mengen $B_n \subseteq I$, $n\in\mathbb{N}$, mit $\lambda^1(B_n) = 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, sodass $R(u_n|_{I\setminus B_n})$ für alle $n\in\mathbb{N}$ separabel ist.

1. Schwache Messbarkeit: Nach Voraussetzung existiert eine Lebesgue-messbare Menge $B_0 \subseteq I$ mit $\lambda^1(B_0) = 0$, sodass

$$\langle f, u_n(t)\rangle_X \to \langle f, u(t)\rangle_X \quad (n\to\infty) \quad \text{ für alle } t\in I\setminus B_0 \text{ und } f\in X^*\,. \tag{1.38}$$

Da fast überall Grenzwerte Lebesgue-messbarer Funktionen wieder Lebesgue-messbar sind, folgt aus (1.38) zusammen mit (1), dass

$$\langle f, u(\cdot)\rangle_X \in \mathcal{L}^0(I) \quad \text{ für alle } f\in X^*\,,$$

d.h. u ist schwach messbar.

2. Fast-Separabelwertigkeit: Aus (1.38) folgt, dass

$$\operatorname{conv}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(u_n|_{I\setminus B_n})\Big) \tag{1.39}$$

separabel ist. Definieren wir $B \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} B_n$, dann gilt, dass $\lambda^1(B) = 0$ und mit (1.38) und dem Satz von Mazur

$$\begin{aligned} R(u|_{I\setminus B}) &\overset{(1.38)}{\subseteq} \overline{\operatorname{conv}\Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(u_n|_{I\setminus B_n})\Bigg)}^{\omega(X,X^*)} \\ &= \overline{\operatorname{conv}\Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(u_n|_{I\setminus B_n})\Bigg)}^{\|\cdot\|_X} . \end{aligned}$$

Wegen (1.39) ist $R(u|_{I\setminus B})$ separabel, d.h. u ist fast separabelwertig.
Der Satz von Pettis (*cf.* Satz 1.31) liefert schließlich, dass $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$. $\square$

Beispiel 1.40 (Eine nicht fast separabelwertige Funktion)
Betrachte die Funktion $u\colon (0,1) \to L^\infty(0,1)$, *definiert durch*

$$u(t) \coloneqq \chi_{(0,t)} \qquad \text{in } L^\infty(0,1) \qquad \text{für f.a. } t \in I\,,$$

d.h.

$$[u(t)](x) \coloneqq \chi_{(0,t)}(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } x < t\,, \\ 0 & \text{falls } x \geq t\,. \end{cases}$$

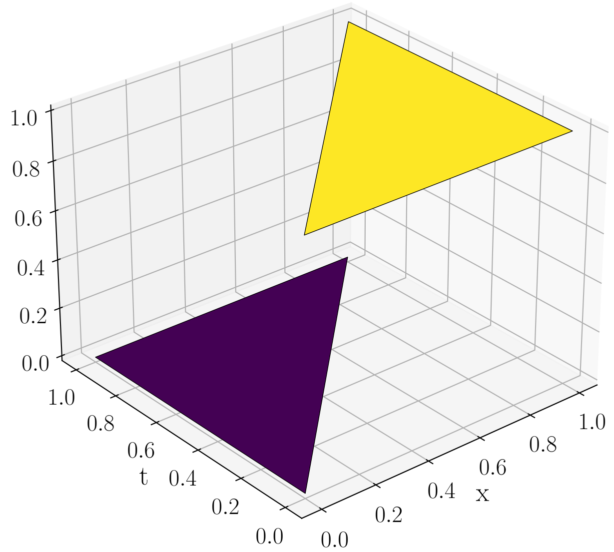

Abbildung 1.2: Die Funktion $u\colon (0,1) \to L^\infty(0,1)$.

Dann gilt:

(i) Die Funktion $u\colon (0,1) \to L^\infty(0,1)$ *ist nicht fast separabelwertig, denn für* $t, s \in (0,1)$ *gilt, dass*

$$\|u(t) - u(s)\|_{L^\infty(0,1)} = 1 \qquad \text{falls } t \neq s\,.$$

Der Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) liefert dann insbesondere, dass die Funktion $u\colon (0,1) \to L^\infty(0,1)$ *nicht Bochner-messbar ist.*

(ii) Die Funktion $u\colon (0,1) \to L^p(0,1)$ *ist für* $p \in [1,\infty)$

- *separabel wetig, da* $L^p(0,1)$ *für* $p \in [1,\infty)$ *separabel ist.*
- *schwach messbar, da für alle* $f \in L^{p'}(0,T)$ *gilt, dass*

$$\left(t \mapsto \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right) \in C^0(0,1) \subseteq \mathcal{L}^0(0,1)\,.$$

Der Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) liefert dann insbesondere, dass die Funktion $u\colon (0,1) \to L^p(0,1)$ *für* $p \in [1,\infty)$ *Bochner-messbar ist.*

Beweis (von Satz 1.31). *Zu "$\Rightarrow$".* Sei $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$. Nach Definition 1.2 existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$ und eine Lebesgue-messbare Menge $B_0 \subseteq I$ mit $\lambda^1(B_0) = 0$, sodass

$$s_n(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \quad \text{für alle } t \in I \setminus B_0 \,. \tag{1.41}$$

1. Schwache Messbarkeit: Wegen (1.41) gilt, dass

$$\langle f, s_n(t)\rangle_X \to \langle f, u(t)\rangle_X \quad (n \to \infty) \quad \text{für alle } t \in I \setminus B_0 \text{ und } f \in X^* \,.$$

Wegen $(\langle f, s_n(\cdot)\rangle_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;\mathbb{R}^1) \subseteq \mathcal{L}^0(I)$ für alle $f \in X^*$, ist $\langle f, u(\cdot)\rangle_X \in \mathcal{L}^0(I)$ für alle $f \in X^*$ als fast-überall-Grenzwert Lebesgue-messbarer Funktionen, d.h. u ist schwach messbar.

2. Fast-Separabelwertigkeit: Wegen (1.41) gilt, dass

$$R(u|_{I\setminus B_0}) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(s_n)}^{\|\cdot\|_X} \,.$$

Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(s_n)$ (da $\operatorname{card}(R(s_n)) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$) abzählbar ist, ist $R(u|_{I\setminus B_0})$ separabel, d.h. u ist fast separabelwertig.

Zu "$\Leftarrow$". Sei $u\colon I \to X$ schwach messbar und fast separabelwertig.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass X selbst separabel ist, denn andernfalls ersetzen wir X durch den separablen Banachraum

$$\overline{\operatorname{span}\, R(u_{|I\setminus B_0})}^{\|\cdot\|_X} \subset X \,,$$

wobei $B_0 \subseteq I$ Lebesgue-messbare ist, sodass $\lambda^1(B_0) = 0$ und $R(u|_{I\setminus B_0})$ separabel ist.

Für separables X lässt sich der Beweis von der Rückrichtung (d.h. von "$\Leftarrow$") in drei Schritte unterteilen:

1. Schritt: Zeige, dass $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$.

2. Schritt: Konstruiere eine Folge von abzählbarwertigen Funktionen $\widetilde{s}_n\colon I \to X$, $n \in \mathbb{N}$, d.h. $R(\widetilde{s}_n)$ ist abzählbar für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\widetilde{s}_n(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I \,.$$

3. Schritt: Konstruiere eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$, sodass

$$s_n(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I \,.$$

1. Schritt: *($\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$)* Für den ersten Schritt benötigen wir folgende Aussage: *Ist X ein separabler Banachraum, dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$, sodass für alle $f_0 \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f_0 \quad \textit{in } X^* \quad (k \to \infty) \,,$$

d.h. $\overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$ ist separabel bezüglich der $*$-schwachen Topologie.

Wenn wir das folgende Ziel erreichen, folgt die Aussage vom 1. Schritt:
Ziel: Zeige, dass

$$A_r := \big\{t \in I \mid \|u(t)\|_X \leq r\big\} \subseteq I \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{R}$$

Lebesgue-messbar ist, d.h. $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$.
Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir erst das folgende Zwischenziel erreichen:
Zwischenziel: Zeige, dass

$$A_r := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_r^{f_n} \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{R}\,,$$

wobei $A_r^f := \{t \in I \mid |\langle f, u(t)\rangle_X| \leq r\} \subseteq I$ wegen der schwachen Messbarkeit von $u\colon I \to X$ für alle $f \in X^*$ und $r \in \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist.
Um dieses Zwischenziel zu erreichen, müssen wir erst das folgende Zwischenzwischenziel erreichen:
Zwischenzwischenziel: Zeige, dass

$$A_r := \bigcap_{f\in\overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}} A_r^f \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis (des Zwischenzwischenziels). Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Dann gilt, dass

$$\begin{aligned}
t \in A_r \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_{f\in\overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}} |\langle f, u(t)\rangle_X = \|u(t)\|_X \leq r \\
&\Leftrightarrow \quad |\langle f, u(t)\rangle_X| \leq r \qquad \text{für alle } f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}} \\
&\Leftrightarrow \quad t \in A_r^f \qquad \text{für alle } f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}} \\
&\Leftrightarrow \quad t \in \bigcap_{f\in\overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}} A_r^f\,.
\end{aligned}$$

Beweis (des Zwischenziels).
Zu "$\subseteq$": Wegen des Zwischenzwischenziels gilt, dass

$$A_r \subseteq \bigcap_{f\in\overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}} A_r^f \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_r^{f_n}\,.$$

Zu "$\supseteq$": Sei $t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_r^{f_n}$ beliebig aber fest. Dann gilt, dass

$$|\langle f_n, u(t)\rangle_X| \leq r \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zu $f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$ existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, sodass

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{ in } X^* \quad (k \to \infty)\,.$$

Daher folgt, dass

$$|\langle f, u(t)\rangle_X| = \lim_{k\to\infty} |\langle f_{n_k}, u(t)\rangle_X| \le r\,,$$

d.h. $t \in A_r^f$.

2. Schritt: *(Konstruktion einer abzählbarwertigen Folge)* Da X separabel ist, existieren zu jedem festen $n \in \mathbb{N}$ ein Folge $(x_{j,n})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$, sodass

$$R(u) \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{B^X_{\frac{1}{n}}(x_{j,n})}^{\|\cdot\|_X}\,.$$

Da $u(\cdot) - x_{j,n} \colon I \to X$ für alle $j, n \in \mathbb{N}$ schwach messbar ist, gilt wegen dem 1. Schritt im Beweis des Satzes von Pettis (*cf.* Satz 1.31), dass

$$(\|u(\cdot) - x_{j,n}\|_X)_{j,n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^0(I)\,.$$

Definieren wir die Mengen

$$B_{j,n} \coloneqq \left\{ t \in I \;\middle|\; \|u(t) - x_{j,n}\|_X \le \frac{1}{n} \right\} \qquad \text{für alle } j, n \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt:

- $B_{j,n} \subseteq I$ ist für alle $j, n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-messbar.
- $I = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{j,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definieren wir weiter die Mengen

$$\widetilde{B}_{i,n} \coloneqq B_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_{j,n} \qquad \text{für alle } j, n \in \mathbb{N}\,,$$

dann gilt:

- $\widetilde{B}_{i,n} \subseteq I$ ist für alle $i, n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-messbar.
- $I = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{B}_{i,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\widetilde{B}_{i,n} \cap \widetilde{B}_{j,n} = \emptyset$, falls $i \neq j$.

Definieren wir schließlich die Funktionen $\widetilde{s_n} \colon I \to X$, $n \in \mathbb{N}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\widetilde{s_n}(t) \coloneqq \sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i,n} \chi_{\widetilde{B}_{i,n}}(t) \quad \text{ in } X \quad \text{ für alle } t \in I\,,$$

Dann gilt:

- $R(\widetilde{s_n})$ ist abzählbar für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\widetilde{s_n} \colon I \to X$ schwach messbar für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

  $$\|\widetilde{s_n}(t) - u(t)\|_X \le \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } t \in I\,,$$

  d.h. insbesondere gilt, dass

  $$\widetilde{s_n}(t) \to u(t) \quad \text{ in } X \quad \text{ für alle } t \in I\,.$$

Exkurs: (zum 3. Schritt im Beweis des Satzes von Pettis)

Bevor wir den 3. Schritt im Beweis des Satzes von Pettis beweisen können, erwähnen wir noch zwei weitere Sätze, die aus der klassischen Maßtheorie bekannt sein sollten.

Definition 1.42 (Fast gleichmäßige Konvergenz)

Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon I\to X$ konvergiert fast gleichmäßig *gegen* $u\colon I\to X$*, falls für alle* $\varepsilon>0$ *eine Lebesgue-messbare Menge* $F\subseteq I$ *mit* $\lambda(F)<\varepsilon$ *existiert, sodass*

$$u_n\to u\quad(n\to\infty)\qquad\textit{gleichmäßig auf } I\setminus F\,,$$

d.h.

$$\sup_{t\in I\setminus F}\|u_n(t)-u(t)\|_X\to 0\quad(n\to\infty)\,.$$

Definition 1.43 (Konvergenz nach Maß)

Sei X *ein separabler Banachraum. Eine Folge* $u_n\colon I\to X$*,* $n\in\mathbb{N}$*, schwach messbarer Funktionen* konvergiert nach Maß *gegen eine schwach messbare Funktion* $u\colon I\to X$*, falls*

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^1\big(\{t\in I\mid \|u_n(t)-u(t)\|_X\geq\varepsilon\}\big)=0\qquad\textit{für alle } \varepsilon>0\,.$$

Bemerkung 1.44 *(i) Der 1. Schritt im Beweis von Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) sichert, dass* $(\|u_n(\cdot)-u(\cdot)\|_X)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{L}^0(I)$*, d.h. dass* $\{t\in I\mid\|u_n(t)-u(t)\|_X\geq\varepsilon\}\subseteq I$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$ *Lebesgue-messbar ist.*

(ii) Konvergenz nach Maß (cf. Definition 1.43) ist metrisierbar mit (cf. [Bog07])

$$d_I(u,v):=\inf_{\delta>0}\big\{\lambda^1\big(\{t\in I\mid\|u(t)-v(t)\|_X\geq\varepsilon\}\big)+\delta\big\}\,,$$

d.h. es gilt:

$$u_n\to u\quad(n\to\infty)\quad\textit{nach Maß (in } I\textit{)}\quad\Leftrightarrow\quad d_I(u_n,u)\to 0\quad(n\to\infty)\,.$$

(iii) Fast gleichmäßige Konvergenz impliziert Konvergenz nach Maß (cf. [Els09, §4, Satz 4.4, p. 255]).

Es gilt der folgende Kompaktheitssatz.

Satz 1.45

Sei X *ein separabler Banachraum und* $u_n\colon I\to X$*,* $n\in\mathbb{N}$*, sowie* $u\colon I\to X$ *schwach messbar, sodass*

$$u_n\to u\quad(n\to\infty)\quad\textit{nach Maß (in } I\textit{)}\,.$$

Dann existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$*, sodass*

$$u_{n_k}\to u\quad(n_k\to\infty)\quad\textit{fast gleichmäßig (in } I\textit{)}\,.$$

Beweis. Wir wenden die klassische Version des Satz (*cf.* [Els09, §4, Satz 4.7, p. 256]) auf die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}:=(\|u_n(\cdot)-u(\cdot)\|_X)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{L}^0(I)$ an, wobei wir für die Lebesgue-Messbarkeit den 1. Schritt im Beweis des Satzes von Pettis (*cf.* Satz 1.31) ausnutzen. □

3. Schritt: *(Konstruktion von einfachen Funktionen)* Sei $\widetilde{s}_n \colon I \to X$, $n \in \mathbb{N}$, die Folge von abzählbarwertigen, schwach messbaren Funktionen aus dem 2. Schritt vom Beweis des Satzes von Pettis (*cf.* Satz 1.31), welche

$$\sup_{t\in I} \|\widetilde{s}_n(t) - u(t)\|_X \le \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Laut Definition 1.42 gilt daher auch, dass

$$\widetilde{s}_n \to u \quad (n \to \infty) \qquad \text{fast gleichmäßig in } I\,.$$

Laut Bemerkung 1.44(iii) impliziert dies wiederum, dass

$$\widetilde{s}_n \to u \quad (n \to \infty) \qquad \text{nach Maß in } I\,,$$

was wegen Bemerkung 1.44(ii) äquivalent ist zu

$$d_I(\widetilde{s}_n, u) \to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Bezeichne nun $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Intervallen, sodass

- $I_n \subseteq I_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Dann definieren wir die Doppelfolge von einfachen Funktionen $(s_n^\ell)_{\ell,n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$ durch

$$s_n^\ell(t) \coloneqq \sum_{i=0}^{\ell} x_{i,n} \chi_{\widetilde{B}_{i,n}\cap I_n}(t) \quad \text{ in } X \qquad \text{für alle } t \in I \qquad \text{für alle } \ell, n \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt:

- $s_n^\ell = s_n$ auf $I_n \setminus \bigcup_{i=\ell+1}^{\infty} \widetilde{B}_{i,n} \cap I_n$ für alle $\ell, n \in \mathbb{N}$.
- Für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, existiert ein $\ell_0 \coloneqq \ell_0(\varepsilon, n) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\lambda^1\Bigg(\bigcup_{i=\ell+1}^{\infty} \widetilde{B}_{i,n} \cap I_n\Bigg) = \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \lambda^1(\widetilde{B}_{i,n} \cap I_n) < \varepsilon \qquad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N} \text{ mit } \ell \ge \ell_0\,,$$

denn $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^1(\widetilde{B}_{i,n} \cap I_n) = \lambda^1(I_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Laut Definition 1.42 gilt daher, dass

$$s_n^\ell \to s_n \quad (\ell \to \infty) \qquad \text{fast gleichmäßig in } I_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Laut Bemerkung 1.44(iii) impliziert dies wiederum, dass

$$s_n^\ell \to s_n \quad (\ell \to \infty) \qquad \text{nach Maß in } I_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

was wegen Bemerkung 1.44(ii) äquivalent ist zu

$$d_{I_n}(\widetilde{s}_n^\ell, \widetilde{s}_n) \to 0 \quad (\ell \to \infty) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Wegen $d_{I_n}(\widetilde{s}_n, u) \le d_I(\widetilde{s}_n, u) \to 0$ $(n \to \infty)$ (*cf.* Bemerkung 1.44(ii)), existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$, sodass

$$d_{I_{n_k}}(\widetilde{s}_{n_k}, u) \le \frac{1}{2k}\,.$$

Wegen $d_{I_n}(\widetilde{s}_n^\ell, \widetilde{s}_n) \to 0$ $(\ell \to \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, existiert weiter zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\ell_k \in \mathbb{N}$, sodass

$$d_{I_{n_k}}(\widetilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, \widetilde{s}_{n_k}) \le \frac{1}{2k}\,.$$

Folglich gilt

$$d_{I_{n_k}}(\widetilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, u) \le d_{I_{n_k}}(\widetilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, \widetilde{s}_{n_k}) + d_{I_{n_k}}(\widetilde{s}_{n_k}, u) \le \frac{1}{k} \to 0 \quad (k \to \infty)\,.$$

Insbesondere gilt

$$d_{I_\ell}(\widetilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, u) \le d_{I_{n_k}}(\widetilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, u) \to 0 \quad (k \to \infty; n_k \ge \ell)\,,$$

was wegen Bemerkung 1.44(ii) äquivalent ist zu

$$\widetilde{s}_{n_k}^{\ell_k} \to u \quad (k \to \infty) \qquad \text{nach Maß in } I_\ell \qquad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}\,.$$

Satz 1.45 liefert dann iterativ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(s_n^\ell)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s_n^{\ell-1})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \widetilde{s}_{n_k}^{\ell_k}$, sodass

$$s_n^\ell(t) \to u(t) \quad \text{ in } X \quad \text{ für alle } t \in I_\ell \setminus B_\ell\,,$$

wobei $B_\ell \subseteq B_{\ell-1}$ mit $\lambda^1(B_\ell) = 0$. Die Diagonalfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s_n^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$ erfüllt dann

$$s_n(t) \to u(t) \quad \text{ in } X \quad \text{ für alle } t \in I \setminus B\,,$$

wobei $B := \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} B_\ell$ Lebesgue-messbar ist und $\lambda^1(B) = 0$ erfüllt. Dies zeigt schließlich, dass $u \in \mathcal{L}^0(I;X)$. $\square$

2 Bochner–Lebesgue-Räume

Das Bochner-Kriterium (*cf.* Satz 1.15) motivierte die Definition

$$\mathcal{L}^1(I;X) = \left\{u \in \mathcal{L}^0(I;X) \mid \|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^1(I)\right\},$$

die Anlass zur Definition des Bochner–Lebesgue-Raum $L^1(I;X)$ gab (*cf.* Definition 1.17). In Analogie zur klassischen L^p-Theorie lässt sich die Definition des Raums $L^1(I;X)$ auf L^p-Integrabilität erweitern.

2.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition 2.1 (Der Bochner–Lebesgue-Raum $L^p(I;X)$)
Sei $p \in [1,\infty]$. Dann ist der Bochner–Lebesgue-Raum *definiert durch*

$$L^p(I;X) \coloneqq \left\{u \in L^0(I;X) \mid \|u(\cdot)\|_X \in L^p(I)\right\},$$

und ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{L^p(I;X)} \coloneqq \big\|\|u(\cdot)\|_X\big\|_{L^p(I)} = \begin{cases} \left(\int_I \|u(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } p < \infty\,,\\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in I}\|u(t)\|_X & \text{falls } p = \infty\,.\end{cases}$$

Bevor wir zur Vollständigkeit von $L^p(I;X)$ kommen, notieren wir einige Folgerungen.

Korollar 2.2 (Erste Resultate)
Sei $p \in [1,\infty]$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $(L^p(I;X), \|\cdot\|_{L^p(I;X)})$ *ist ein normierter Vektorraum.*

(ii) Falls $X \hookrightarrow Y$, dann gilt

$$L^p(I;X) \hookrightarrow L^p(I;Y)\,.$$

(iii) Falls $A\colon X \to Y$ linear und stetig ist, dann ist der (linear-)induzierte Operator $\mathcal{A}\colon L^p(I;X) \to L^p(I;Y)$, *für alle $u \in L^p(I;X)$ definiert durch*

$$(\mathcal{A}u)(t) \coloneqq A(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t \in I\,,$$

wohldefiniert, linear und stetig. Insbesondere gilt für alle $u \in L^p(I;X)$, dass

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^p(I;Y)} \le \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|u\|_{L^p(I;X)}\,.$$

Beweis. (Übung). □

Die L^p-Integrabilität des Bochner–Lebesgue-Raums $L^p(I;X)$ ermöglicht eine Verallgemeinerung der Hölder'schen Ungleichung. Dazu ersetzen wir die skalare Multiplikation $f(\cdot)u(\cdot)$ durch das Dualitätsprodukt $\langle f(\cdot), u(\cdot)\rangle_X$.

Satz 2.3 (Hölder'sche Ungleichung)
Seien $p, p' \in [1, \infty]$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *(d.h.* $p' = 1$*, falls* $p = \infty$*, und* $p' = \infty$*, falls* $p = 1$*). Dann gilt für alle* $f \in L^{p'}(I; X^*)$ *und* $u \in L^p(I; X)$*, dass* $\langle f(\cdot), u(\cdot)\rangle_X \in L^1(I, \mathbb{R})$ *mit*

$$\int_I |\langle f(t), u(t)\rangle_X| \, \mathrm{d}t \le \|f\|_{L^{p'}(I;X^*)} \|u\|_{L^p(I;X)} \,.$$

Beweis. *1. Lebesgue-Messbarkeit:* Da $f \in L^{p'}(I; X^*)$, $u \in L^p(I; X)$ Bochner-messbar sind, existieren Folgen von einfachen Funktionen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X^*)$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, sodass

$$\begin{aligned} k_n(t) &\to f(t) \quad && \text{in } X^* \quad && (n \to \infty) \quad && \text{für f.a. } t \in I \,, \\ s_n(t) &\to u(t) \quad && \text{in } X \quad && (n \to \infty) \quad && \text{für f.a. } t \in I \,. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus der Stetigkeit des Dualitätsprodukts $\langle \cdot, \cdot\rangle_X \colon X^* \times X \to \mathbb{R}$, dass

$$\langle k_n(t), s_n(t)\rangle_X \to \langle f(t), u(t)\rangle_X \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I \,.$$

Wegen $(\langle k_n(\cdot), s_n(\cdot)\rangle_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^0(I; \mathbb{R})$, ist $\langle f(\cdot), u(\cdot)\rangle_X \in L^0(I; \mathbb{R})$.

2. Lebesgue-Integrierbarkeit: Laut Definition 2.1 gilt $\|f(\cdot)\|_{X^*} \in L^{p'}(I)$ und $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(I)$. Mit der klassischen Hölder-Ungleichung folgt daher, dass $\langle f(t), u(t)\rangle_X \in L^1(I, \mathbb{R})$ mit

$$\int_I |\langle f(t), u(t)\rangle_X| \, \mathrm{d}t \le \int_I \|f(t)\|_{X^*} \|u(t)\|_X \, \mathrm{d}t \le \|f\|_{L^{p'}(I;X^*)} \|u\|_{L^p(I;X)} \,. \qquad \square$$

Korollar 2.4 (aus der Hölder'schen Ungleichung (*cf.* Satz 2.3))
Die folgenden Aussagen gelten:

(i) Falls $1 \le p \le q \le \infty$ *und* $I \subseteq \mathbb{R}$ *beschränkt, dann gilt*

$$L^q(I; X) \hookrightarrow L^p(I; X) \,.$$

(ii) Falls $1 \le p \le r \le q \le \infty$*, dann gilt*

$$L^p(I; X) \cap L^q(I; X) \hookrightarrow L^r(I; X) \,.$$

Genauer gilt für alle $u \in L^p(I; X) \cap L^q(I; X)$*, dass* $u \in L^r(I; X)$ *mit*

$$\|u\|_{L^r(I;X)} \le \|u\|_{L^q(I;X)}^{1-\theta} \|u\|_{L^p(I;X)}^{\theta} \,,$$

wobei $\theta \in [0, 1]$*, sodass* $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p}$.

(iii) Seien $1 \le p, q, r \le \infty$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *und* $B \colon X \times Y \to Z$ *bilinear und stetig. Dann ist der* (bilinear-)induzierte operator $\mathcal{B} \colon L^p(I; X) \times L^q(I; Y) \to L^r(I; Z)$*, für alle* $(u, v)^\top \in L^p(I; X) \times L^q(I, Y)$ *definiert durch*

$$\mathcal{B}(u, v)(t) \coloneqq B(u(t), v(t)) \quad \textit{in } Z \quad \textit{für f.a. } t \in I \,,$$

wohldefiniert, bilinear und stetig. Insbesondere gilt für alle $(u, v)^\top \in L^p(I; X) \times L^q(I, Y)$*, dass*

$$\|\mathcal{B}(u, v)\|_{L^r(I;Z)} \le \|B\|_{\mathcal{L}(X\times Y, Z)} \|(u, v)^\top\|_{L^p(I;X)\times L^q(I;Y)} \,.$$

Beweis. Folgt aus der Hölder'schen Unlgeichung (*cf.* Satz 2.3) analog zur klassischen L^p-Theorie. $\square$

2.2 Vollständigkeit von Bochner–Lebesgue-Räumen

Wir kommen nun zu einem der zentralen Resultate dieses Abschnitts, der Vollständigkeit von Bochner–Lebesgue-Räumen.

Theorem 2.5 (Vollständigkeit von $L^p(I;X)$)
Sei $p \in [1,\infty]$. Dann ist $(L^p(I;X), \|\cdot\|_{L^p(I;X)})$ ein Banachraum.

Beweis. Wir unterscheiden die Fälle $p < \infty$ und $p = \infty$.

1. Fall: ($p < \infty$) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;X)$ eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\|u_n - u_k\|_{L^p(I;X)} \to 0 \quad (n,k \to \infty)\,.$$

Wir finden daher eine wachsende Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_j \to \infty$ $(j \to \infty)$, sodass

$$\|u_n - u_{k_j}\|_{L^p(I;X)}^p < 4^{-j} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq k_j\,. \tag{2.6}$$

Dann gilt wegen $k_{j+1} \geq k_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und (2.6) für $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \coloneqq (u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;X)$, dass

$$\|v_{j+1} - v_j\|_{L^p(I;X)}^p < 4^{-j} \text{ für alle } j \in \mathbb{N}\,. \tag{2.7}$$

Wir definieren die Lebesgue-messbaren Mengen

$$M_j \coloneqq \big\{t \in I \mid \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p \geq 2^{-j}\big\} \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
\lambda^1(M_j) &= \int_I \chi_{M_j}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq 2^j \int_I \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t \\
&= 2^j \|v_{j+1} - v_j\|_{L^p(I;X)}^p \\
&< 2^j \cdot 4^{-j} = 2^{-j}\,.
\end{aligned}$$

Als nächstes definieren wir die Lebesgue-messbaren Mengen

$$N_i \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{N}\,:\,j\geq i} M_j \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, dass $N_{i+1} \subseteq N_i$ sowie

$$\begin{aligned}
\lambda^1(N_i) &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}\,:\,j\geq i} \lambda^1(M_j) \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{N}\,:\,j\geq i} 2^{-j} \\
&= 2^{1-i}\,.
\end{aligned}$$

Schließlich definieren wir die Lebesgue-messbare Menge $N := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i$, die wegen der Oberhalbstetigkeit des Lebesgue-Maßes (wobei wir ausnutzen, dass $N_{i+1} \subseteq N_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie $\lambda^1(N_1) \leq 2^{1-1} = 1$)

$$\begin{aligned}\lambda^1(N) &\leq \liminf_{i\to\infty} \lambda^1(N_i)\\ &= \limsup_{i\to\infty} \lambda^1(N_i)\\ &= \lim_{i\to\infty} 2^{1-i} = 0\,.\end{aligned}$$

erfüllt.

<u>*Zusammenfassung:*</u> Für alle $t \in I \setminus N$ existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $t \notin N_i$ (d.h. $t \notin M_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq i$), d.h.

$$\|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p < 2^{-j} \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \text{ mit } j \geq i\,.$$

Insbesondere ist $(v_j(t))_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ für alle $t \in I \setminus N$ eine Cauchy-Folge, denn

$$\|v_j(t) - v_i(t)\|_X \leq \sum_{\ell=i}^{\infty} \|v_{\ell+1}(t) - v_\ell(t)\|_X < \sum_{\ell=i}^{\infty} 2^{-\frac{j}{p}} \to 0 \quad (i \to \infty, j \geq i)\,.$$

Da X ein Banachraum ist, existiert daher für alle $t \in I \setminus N$ ein Element $u_t \in X$, sodass

$$v_j(t) \to u_t \quad \text{ in } X \quad (j \to \infty)\,.$$

Definiere dann die Funktion $u\colon I \to X$ für alle $t \in I$ durch

$$u(t) := \begin{cases} u_t & \text{falls } t \in I \setminus N\,,\\ 0 & \text{falls } t \in N\,.\end{cases}$$

Wegen $\lambda^1(N) = 0$ gilt dann, dass

$$v_j(t) \to u(t) \quad \text{ in } X \quad (j \to \infty) \qquad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Korollar 1.37 sichert dann, dass $u \in L^0(I;X)$. Lemma 1.4 liefert wiederum, dass $\|u(\cdot)\|_X \in L^0(I)$. Das heißt wir können auf L^p-Integrabilität prüfen. Tatsächlich folgt mit dem Lemma von Fatou (*cf.* [Els09, Kap. IV, §5, Lem. 5.1, S. 144]) für alle $j \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, dass

$$\begin{aligned}\int_I \|u(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t &\leq 2^{p-1} \int_I \|u(t) - v_j(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t + 2^{p-1} \int_I \|v_j(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t\\ &\leq \underbrace{2^{p-1} \liminf_{i\to\infty} \int_I \|v_i(t) - v_j(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t}_{\to 0 \quad (j\to\infty)} + 2^{p-1} \int_I \|v_j(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t < \infty\,.\end{aligned}$$

d.h. $u \in L^p(I;X)$ (*cf.* Definition 2.1). Des Weiteren gilt mit dem Lemma von Fatou (*cf.* [Els09, Kap. IV, §5, Lem. 5.1, S. 144]), dass

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|_{L^p(I;X)}^p &\leq 2^{p-1}\|u_n - v_j\|_{L^p(I;X)}^p + 2^{p-1}\|v_j - u\|_{L^p(I;X)}^p\\ &\leq 2^{p-1}\|u_n - v_j\|_{L^p(I;X)}^p + 2^{p-1} \liminf_{i\to\infty} \|v_j - v_i\|_{L^p(I;X)}^p\\ &\to 0 \quad (n, j \to \infty)\,,\end{aligned}$$

d.h. $u_n \to u$ in $L^p(I;X)$ $(n \to \infty)$.

2. Fall: ($p = \infty$) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(I, X)$ eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\|u_n - u_k\|_{L^\infty(I;X)} \to 0 \quad (n, k \to \infty)\,.$$

Wir finden daher eine wachende Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $k_j \to \infty$ $(j \to \infty)$, sodass

$$\|u_n - u_k\|_{L^\infty(I;X)} < \frac{1}{j} \qquad \text{für alle } n, k, j \in \mathbb{N} \text{ mit } n, k \geq k_j\,.$$

Insbesondere existiert dann für alle $n, k, j \in \mathbb{N}$ mit $n, k \geq k_j$ eine Lebesgue-messbare Menge $N_{k,n}^j \subseteq I$ mit $\lambda^1(N_{k,n}^j) = 0$, sodass

$$\|u_n(t) - u_k(t)\|_X < \frac{1}{j} \qquad \text{für alle } t \in I \setminus N_{k,n}^j\,.$$

Definieren wir die Lebesgue-messbare $N \coloneqq \bigcup_{\substack{n,k,j\in\mathbb{N}\\ n,k\geq k_j}} N_{k,n}^j \subseteq I$, dann gilt $\lambda^1(N) = 0$ und für alle $t \in I \setminus N$ gilt, dass

$$\|u_n(t) - u_k(t)\|_X < \frac{1}{j} \qquad \text{für alle } n, k, j \in \mathbb{N} \text{ mit } n, k \geq k_j\,.$$

Damit ist $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $t \in I \setminus N$ eine Cauchy-Folge im Banachraum X. Daher existiert für alle $t \in I \setminus N$ ein Element $u_t \in X$, sodass

$$u_n(t) \to u(t) \qquad \text{in } X \quad (n \to \infty)\,.$$

Definiere dann die Funktion $u\colon I \to X$ für alle $t \in I$ durch

$$u(t) \coloneqq \begin{cases} u_t & \text{falls } t \in I \setminus N\,, \\ 0 & \text{falls } t \in N\,. \end{cases}$$

Wegen $\lambda^1(N) = 0$ gilt dann, dass

$$u_n(t) \to u(t) \qquad \text{in } X \quad (n \to \infty) \qquad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Korollar 1.37 sichert dann, dass $u \in L^0(I; X)$. Lemma 1.4 liefert wiederum, dass $\|u(\cdot)\|_X \in L^0(I)$. Das heißt wir können auf essentielle Beschränktheit prüfen. In der Tat gilt für alle $t \in I \setminus N$, dass

$$\|u(t)\|_X = \lim_{n\to\infty} \|u_n(t)\|_X \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^\infty(I;X)}\,,$$

d.h. $u \in L^\infty(I; X)$. Weiter gilt für alle $t \in I \setminus N$, dass

$$\|u_n(t) - u(t)\|_X = \lim_{k\to\infty} \|u_n(t) - u_k(t)\|_X \leq \frac{1}{j} \qquad \text{für alle } n, j \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq k_j\,,$$

d.h.

$$\|u_n - u\|_X \leq \frac{1}{j} \qquad \text{für alle } n, j \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq k_j\,.$$

Mit anderen Worten gilt $u_n \to u$ in $L^\infty(I; X)$ $(n \to \infty)$. $\square$

Aus dem Beweis von Theorem 2.5 ergibt sich die nützliche Folgerung

Folgerung 2.8 (Umkehrung des Satzes von Lebesgue)
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;X)$ *eine Folge, sodass*

$$u_n \to u \quad L^p(I;X) \quad (n \to \infty)\,.$$

Dann existiert eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;X)$*, sodass*

$$u_{k_j}(t) \to u(t) \quad X \quad (j \to \infty) \qquad \textit{für f.a. } t \in I\,.$$

Beweis. *1. Fall:* *(*$p < \infty$*)* Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;X)$ eine Cauchy-Folge ist, existiert eine monoton wachsende Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_j \to \infty$ $(j \to \infty)$, sodass

$$\|u_n - u_{k_j}\|_{L^p(I;X)}^p < \frac{1}{4^j} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq j \text{ und alle } j \in \mathbb{N}\,.$$

Analog zum Beweis von Theorem 2.5 im Fall $p < \infty$ folgt dann, dass

$$u_{k_j}(t) \to u(t) \quad \text{ in } X \quad (j \to \infty) \qquad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

1. Fall: *(*$p = \infty$*)* Analog zum Fall $p < \infty$. □

2.3 Dichte Teilmengen von Bochner–Lebesgue-Räumen

In diesem Abschnitt identifizieren wir einige wichtige dichte Teilmengen von Bochner–Lebesgue-Räumen.

Satz 2.9 (Dichtheit von einfachen Funktionen)
Für $p \in [1, \infty)$ liegt $\mathcal{S}(I; X)$ dicht in $L^p(I; X)$.

Beweis. Für $p = 1$ haben wir die Behauptung bereits in Satz 1.15 gezeigt. Für $p \in (1, \infty)$ verläuft der Beweis völlig analog. □

Bemerkung 2.10 (Dichtheit von Treppenfunktionen)
Eine Funktion $s\colon I \to X$ heißt Treppenfunktion, *falls paar-weise disjunkte Intervalle $I_i \subseteq I$, $i = 1, \dots, n$, mit endlichem Lebesgue-Maß $\lambda^1(I_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, und Elemente $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, existieren, sodass*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{I_i}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I\,.$$

Die Menge der Treppenfunktionen *auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(I; X)$.*

Für $p \in [1, \infty)$ liegt $\mathcal{T}(I; X)$ dicht in $L^p(I; X)$ (cf. [GGZ74, Lemma 1.3]).

Die folgenden spezielle dichte Teilmenge erweist als sehr nützlich.

Korollar 2.11 (Spezielle dichte Teilmenge)
Falls $p \in [1, \infty)$, $C \subseteq L^p(I)$ eine dichte Teilmenge von $L^p(I)$ und $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge von X ist, dann ist die Menge

$$M(C, D) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i\, d_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, c_i \in C, d_i \in D \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

dicht in $L^p(I; X)$.

Bemerkung 2.12 (Kanonische Beispiele für dichte Teilmengen $C \subseteq L^p(I)$)
Kanonische Beispiele für dichte Teilmengen von $L^p(I)$ sind $C = C_c^\infty(\mathring{I})$, $C = C^\infty(I) \cap L^p(I)$ und im Fall $\lambda^1(I) < \infty$ auch $C = C^\infty(\overline{I})$.

Korollar 2.11 zusammen mit Bemerkung 2.12 liefert insbesondere das folgende Resultat.

Korollar 2.13
Falls $p \in [1, \infty)$, dann gilt:
(i) $C_c^\infty(\mathring{I}; X) := \{u \in C^\infty(I; X) \mid \operatorname{supp} u \subseteq \mathring{I}\}$ *liegt dicht in* $L^p(I; X)$;
(ii) $C^\infty(I; X) \cap L^p(I; X)$ *liegt dicht in* $L^p(I; X)$;
(iii) $C^\infty(\overline{I}; X)$ *liegt dicht in* $L^p(I; X)$, *falls* $I \subseteq \mathbb{R}$ *beschränkt ist.*

Beweis (von Korollar 2.11). Sei $u \in L^p(I;X)$ beliebig. Wegen Satz 2.9 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $u \in L^p(I;X)$ von der Form $u(t) = x\,\chi_B(t)$ in X für fast alle $t \in I$ mit $x \in X$ und Lebesgue-messbarer Menge $B \subseteq I$ ist. Nach Voraussetzung existieren nun Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, sodass

$$\begin{aligned} c_n &\to \chi_B && \text{in } L^p(I) && (n\to\infty)\,,\\ d_n &\to x && \text{in } X && (n\to\infty)\,. \end{aligned}$$

Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^p(I;X)} &= \|x\chi_B - c_n d_n\|_{L^p(I;X)}\\ &\le \|x - d_n\|_X \|\chi_B\|_{L^p(I;X)}\\ &\quad + \|d_n\|_X \|\chi_B - c_n\|_{L^p(I)} \to 0 \quad (n\to\infty)\,. \end{aligned}$$ □

Beweis (von Korollar 2.13). *1. Inklusionen:* (Übung).

2. Dichtheit: Folgt aus Korollar 2.11 wegen Bemerkung 2.12. □

Theorem 2.14 (Separabilität von $L^p(I;X)$)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $L^p(I;X)$ ist separabel;

(ii) $L^p(I)$ ist separabel (d.h. $p<\infty$) und X ist separabel.

Beweis. *Zu (ii) ⇒ (i).* Da $L^p(I)$ separabel ist, existiert eine abzählbare und dichte Teilmenge $C \subseteq L^p(I)$. Da X separabel ist, existiert eine abzählbare und dichte Teilmenge $D \subseteq X$. Laut Korollar 2.11 ist dann die spezielle Teilmenge $M(C,D)$ dicht in $L^p(I;X)$. Da $M(C,D)$ außerdem abzählbar ist, folgt schließlich die Separabilität von $L^p(I;X)$.

Zu (i) ⇒ (ii). Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} A &:= \left(x \mapsto \lambda^1(S)^{-\frac{1}{p}}\chi_S x\right) \colon X \to L^p(I;X)\,,\\ B &:= (f \mapsto x_0 f) \colon L^p(I) \to L^p(I;X)\,, \end{aligned}$$

wobei $S \subseteq I$ Lebesgue-messbar ist mit $\lambda^1(S) \in (0,\infty)$ und $x_0 \in X$ mit $\|x_0\|_X = 1$. Da $L^p(I;X)$ separabel ist, sind die Bilder $R(A), R(B) \subseteq L^p(I;X)$ ebenfalls separabel. Da die Abbildungen $A\colon X \to L^p(I;X)$ und $B\colon L^p(I) \to L^p(I;X)$ Isometrien sind (Übung), müssen X und $L^p(I)$ ebenfalls separabel sein. □

$$\begin{tikzcd} & L^p(I;X) & \\ X \arrow[ur, "A"] & & L^p(I) \arrow[ul, "B"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung 2.1: Abbildungsdiagramm zum Beweis von Theorem 2.14.

Satz 2.15 (Glättung mittels Faltung)
Sei $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, und $p \in [1,\infty]$. Bezeichne weiter $\mathcal{E}_I \colon L^p(I;X) \to L^p(\mathbb{R};X)$ den Null-Fortsetzungsoperator, *für alle $u \in L^p(I;X)$ und fast alle $t \in I$ definiert durch*

$$(\mathcal{E}_I u)(t) := \begin{cases} u(t) & \textit{falls } t \in I\,, \\ 0 & \textit{falls } t \in \mathbb{R} \setminus I\,. \end{cases}$$

Dann definieren wir den Faltungsglättungsoperator $\mathcal{S}_I^h \colon L^p(I;X) \to C^\infty(\mathbb{R};X)$ *für alle $u \in L^p(I;X)$ durch*

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_I^h u)(t) &:= (\omega_h * \mathcal{E}_I u)(t) \\ &:= \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)(\mathcal{E}_I u)(s)\,\mathrm{d}s\,, \end{aligned}$$

wobei $\omega_h \in C_0^\infty(-h,h)$, $h > 0$, eine Familie von normierten Standardglättern ist, d.h.

$$\omega_h(t) := \frac{1}{h}\omega\left(\frac{t}{h}\right) \qquad \textit{für alle } t \in \mathbb{R} \textit{ und } h > 0\,,$$

wobei $\omega \in C_0^\infty((-1,1);\mathbb{R}_{\geq 0})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \omega(s)\,\mathrm{d}s = 1$. Dann ist $\mathcal{S}_I^h \colon L^p(I;X) \to C^\infty(\mathbb{R};X)$ wohldefiniert, linear und es gelten die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $u \in L^p(I;X)$ gilt, dass

$$\operatorname{supp}(\mathcal{S}_I^h u) \subseteq [-h, T+h] \qquad \textit{für alle } h > 0\,.$$

(ii) Für alle $u \in L^p(I;X)$ gilt, dass

$$\|\mathcal{S}_I^h u\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \leq \|u\|_{L^p(I;X)} \qquad \textit{für alle } h > 0\,.$$

(iii) Falls $p < \infty$, dann gilt für alle $u \in L^p(I;X)$, dass

$$\mathcal{S}_I^h u \to u \qquad \textit{in } L^p(I;X) \quad (h \to 0)\,.$$

Beweis. Die Wohldefiniertheit des Faltungsglättungsoperators, d.h. dass $\mathcal{S}_I^h u \in C^\infty(\mathbb{R};X)$ für alle $u \in L^p(I;X)$, folgt wie im klassischen Fall aus Standardresultaten über Parameterintegrale und den Eigenschaften der Faltung. Die Linearität ist evident. Daher konzentrieren wir uns auf den Beweis von (i)–(iii):

Zu (i). Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus [-h, T+h]$ gilt, dass $B_h^1(t) \subseteq \mathbb{R} \setminus I$, d.h. wegen $\mathcal{E}_I u = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus I$ gilt für alle $t \in \mathbb{R} \setminus [-h, T+h]$, dass

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{S}_I^h u)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-s)(\mathcal{E}_I u)(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)(\mathcal{E}_I u)(s)\,\mathrm{d}s = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{in } X\,.$$

Zu (ii). Wegen der Definition der $L^p(I;X)$-Norm (*cf.* Definition 2.1) und der klassischen L^p-Stabilität der Faltung mit Konstante 1 folgt im Fall $p \in (1,\infty)$, dass

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_I^h u\|_{L^p(\mathbb{R};X)} &= \|\omega_h * \mathcal{E}_I u\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \\
&= \bigg(\int_{\mathbb{R}} \bigg\| \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)(\mathcal{E}_I u)(s)\,\mathrm{d}s \bigg\|_X^p \mathrm{d}t \bigg)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \bigg(\int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)\|(\mathcal{E}_I u)(s)\|_X \,\mathrm{d}s \bigg)^p \mathrm{d}t \bigg)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|(\omega_h * \|\mathcal{E}_I u\|_X)(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\le \|\|(\mathcal{E}_I u)(\cdot)\|_X\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&= \|\mathcal{E}_I u\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \\
&= \|u\|_{L^p(I;X)} \,.
\end{aligned}$$

Der Fall $p = \infty$ folgt analog (Übung).

Zu (iii). Für alle $v \in C^0(\mathbb{R};X)$ gilt wegen $\int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)\,\mathrm{d}s = 1$ für alle $t \in I$, dass

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_I^h v - v\|_{L^p(I;X)} &= \|\omega_h * \mathcal{E}_I v - v\|_{L^p(I;X)} \\
&= \bigg(\int_I \bigg\| \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)(\mathcal{E}_I v)(s)\,\mathrm{d}s - v(t) \bigg\|_X^p \mathrm{d}t \bigg)^{\frac{1}{p}} \\
&= \bigg(\int_I \bigg\| \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)((\mathcal{E}_I v)(s) - v(t))\,\mathrm{d}s \bigg\|_X^p \mathrm{d}t \bigg)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \bigg(\int_I \bigg(\int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)\|(\mathcal{E}_I v)(s) - v(t)\|_X \,\mathrm{d}s \bigg)^p \mathrm{d}t \bigg)^{\frac{1}{p}} \\
&\le T^{\frac{1}{p}} \sup_{\substack{t,s\in[-h,T+h] \\ |t-s|\le h}} \|v(t)-v(s)\|_X \to 0 \quad (h\to 0)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $v\colon \mathbb{R}\to X$ auf Kompakta gleichmäßig stetig ist. Wegen Korollar 2.13 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u_\varepsilon \in C_c^0(I;X) \subseteq C^0(\mathbb{R};X)$, sodass

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(I;X)} < \varepsilon.$$

Wir folgern daher für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\to 0} \|\mathcal{S}_I^h u - u\|_{L^p(I;X)} &\le \limsup_{h\to 0} \|\mathcal{S}_I^h (u-u_\varepsilon)\|_{L^p(I;X)} \\
&\quad + \limsup_{h\to 0} \|\mathcal{S}_I^h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^p(I;X)} \\
&\quad + \limsup_{h\to 0} \|u - u_\varepsilon\|_{L^p(I;X)} \\
&\le 2\,\|u-u_\varepsilon\|_{L^p(I;X)} \le 2\,\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Schließlich folgt, dass $\limsup_{h\to 0} \|\mathcal{S}_I^h u - u\|_{L^p(I;X)} \le 2\,\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$. $\square$

Mit Hilfe von Satz 2.15 lässt sich das folgende Resultat beweisen.

Korollar 2.16 ($u \in L^\infty(I;X)$ & $ju \in C^0_\omega(I;Y) \Rightarrow u \in C^0_\omega(I;X)$)
Sei $I \coloneqq (0,T)$, $0 < T < \infty$, seien X, Y Banach-Räume und $j\colon X \to Y$ eine Einbettung[1]*. Falls X reflexiv ist, dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Für eine Funktion $u \in L^\infty(I;X)$ mit $ju \in C^0_\omega(I;Y)$, wobei

$$(ju)(t) \coloneqq j(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für alle } t \in I\,,$$

gilt $u \in C^0_\omega(I;X)$. Insbesondere gilt, dass

$$(\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \quad \text{für alle } t \in I\,,$$

wobei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ mit $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

(ii) Für eine Funktion $u \in L^\infty(I;X)$ mit $ju \in C^0_\omega(\overline{I};Y)$, wobei

$$(ju)(t) \coloneqq j(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für alle } t \in \overline{I}\,,$$

gilt $u \in C^0_\omega(\overline{I};X)$.

Bemerkung 2.17
Ist $I \coloneqq (0,T)$, $0 < T < \infty$, und sind X, Y Banach-Räume, sodass $X \hookrightarrow Y$, dann gilt laut Korollar 1.34, dass $C^0_\omega(\overline{I};X) \subseteq L^\infty(I;X)$. Da wegen $X \hookrightarrow Y$[2] *ebenfalls $C^0_\omega(\overline{I};X) \subseteq C^0_\omega(\overline{I};Y)$ gilt, folgt daher, dass*

$$C^0_\omega(\overline{I};X) \subseteq L^\infty(I;X) \cap C^0_\omega(\overline{I};Y)\,.$$

Ist X zusätzlich reflexiv, dann folgt zusammen mit Korollar 2.16 schließlich, dass

$$C^0_\omega(\overline{I};X) = L^\infty(I;X) \cap C^0_\omega(\overline{I};Y)\,.$$

Um Korollar 2.16 beweisen zu können, erweist sich das folgende Resultat aus der Funktionalanalysis als nützlich.

Lemma 2.18
Seien X, Y Banach-Räume und $j\colon X \to Y$ eine Einbettung. Falls X reflexiv ist, dann folgt für eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und ein Element $x \in X$ aus

$$jx_n \rightharpoonup jx \quad \text{in } Y \quad (n \to \infty)\,,$$

dass

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)\,.$$

Beweis. (Übung). ☐

[1] Das heißt $j\colon X \to Y$ ist linear, stetig und injektiv.
[2] Das heißt $X \subseteq Y$ und $\mathrm{id}_X\colon X \to Y$ ist eine Einbettung.

Beweis (von Korollar 2.16). *Zu (i).*

1. Schritt: ($u(t) \in X$ für alle $t \in I$): Laut Satz 2.15(ii) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \overline{I}$, dass

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{S}_I^{h_n}u)(t)\|_X &\leq \|\mathcal{S}_I^{h_n}u\|_{C_b^0(I;X)}\\ &= \|\mathcal{S}_I^{h_n}u\|_{L^\infty(I;X)}\\ &\leq \|u\|_{L^\infty(I;X)}\,,\end{aligned}$$

wobei wir im Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass $\mathcal{S}_I^h u \in C^0(\overline{I};X)$. Insbesondere ist $((\mathcal{S}_I^{h_n}u)(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ für alle $t \in \overline{I}$ beschränkt. Da X reflexiv ist, existiert zu jedem $t \in \overline{I}$ eine Teilfolge $(n_k^t)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und ein Element $u_t \in X$, sodass

$$(\mathcal{S}_I^{h_{n_k^t}}u)(t) \rightharpoonup u_t \quad \text{in } X \quad (k \to \infty)\,.$$

Gleichzeitig gilt wegen Proposition 1.21 für alle $g \in Y^*$ und $t \in I$, dass

$$\begin{aligned}\big\langle g, j\big((\mathcal{S}_I^h u)(t)\big)\big\rangle_Y &= \langle g, (\mathcal{S}_I^h ju)(t)\rangle_Y\\ &= \left\langle g, \int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-s)(\mathcal{E}_I ju)(s)\,\mathrm{d}s\right\rangle_Y\\ &= \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)\langle g, (\mathcal{E}_I ju)(s)\rangle_Y\,\mathrm{d}s\\ &= \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)\mathcal{E}_I(\langle g, ju(\cdot)\rangle_Y)(s)\,\mathrm{d}s\\ &= (\mathcal{S}_I^h(\langle g, ju(\cdot)\rangle_Y))(t)\\ &\to \langle g, ju(t)\rangle_Y \quad (h \to 0)\,,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass $\langle g, u(\cdot)\rangle \in C^0(I)$ und dass für alle $t \in I$ und $h \in (0, \min\{t, T-t\})$, d.h. $B_h^1(t) \subseteq I$, gilt, dass

$$\int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)\mathcal{E}_I(\langle g, u(\cdot)\rangle_Y)(s)\,\mathrm{d}s = \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)\langle g, u(s)\rangle_Y\,\mathrm{d}s\,.$$

Mit anderem Worten gilt für alle $t \in I$, dass

$$j((\mathcal{S}_I^{h_n}u)(t)) = (\mathcal{S}_I^{h_n}ju)(t) \rightharpoonup (ju)(t) \quad \text{in } Y \quad (n \to \infty)\,.$$

Da gleichzeitig für alle $t \in I$ gilt, dass

$$j((\mathcal{S}_I^{h_{n_k^t}}u)(t)) = (\mathcal{S}_I^{h_{n_k^t}}ju)(t) \rightharpoonup j(u_t) \quad \text{in } Y \quad (k \to \infty)\,,$$

folgt aus der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts, dass $(ju)(t) = j(u_t)$ in Y für alle $t \in I$. Die Injektivität von $j\colon X \to Y$ liefert weiter, dass $u(t) = u_t \in X$ für alle $t \in I$. Insbesondere erhalten wir dann für alle $t \in I$, dass

$$j((\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t)) = (\mathcal{S}_I^{h_n} ju)(t) \rightharpoonup j(u(t)) \quad \text{in } Y \quad (n \to \infty)\,.$$

Schließlich folgern wir mit Lemma 2.18 für alle $t \in I$, dass

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t) &\rightharpoonup u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)\,,\\ \|u(t)\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|(\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t)\|_X &\leq \|u\|_{L^\infty(I;X)}\,.\end{aligned}$$

2. Schritt: ($u \in C^0_\omega(I;X)$): Seien $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ und $t^* \in I$ so, dass

$$t_n \to t^* \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)\,.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|u(t_n)\|_X \leq \|u\|_{L^\infty(I;X)}\,,$$

d.h. $(u(t_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ist beschränkt. Da wegen $ju \in C^0_\omega(I;Y)$ gleichzeitig gilt, dass

$$j(u(t_n)) \rightharpoonup j(u(t)) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)\,,$$

folgern wir mit Lemma 2.18, dass

$$u(t_n) \rightharpoonup u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)\,,$$

d.h. $u \in C^0_\omega(I;X)$.

Zu (ii). Wir betrachten die durch Spiegelung fortgesetzte Funktion $\hat{u}\colon 3I \coloneqq (-T, 2T) \to X$, definiert durch

$$\hat{u}(t) \coloneqq \begin{cases} u(-t) & \text{falls } t \in [-T, 0)\,,\\ u(t) & \text{falls } t \in \overline{I}\,,\\ u(2t - T) & \text{falls } t \in (T, 2T]\,. \end{cases}$$

Dann gilt, dass $\hat{u} \in L^\infty(3I;X)$ und $j\hat{u} \in C^0_\omega(3I;Y)$ (Übung), sodass mit (i) folgt, dass $\hat{u} \in C^0_\omega(3I, X)$ und damit $u = \hat{u}|_{\overline{I}} \in C^0_\omega(\overline{I};X)$. $\square$

2.4 Beziehung zu Lebesgue-Räumen auf Zeit-Raum-Zylindern

In diesem Abschnitt untersuchen wir kurz den Bochner–Lebesgue-Raum $L^p(I;L^p(\Omega))$, wobei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist und $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-messbare Menge, zu seiner Beziehung zum Lebesgue-Raum $L^p(I\times\Omega)$. Hierbei wird der Produktraum $I\times\Omega\subseteq\mathbb{R}^{d+1}$ meistens als *Zeit-Raum-Zylinder* bezeichnet.

Satz 2.19 (Beziehung zwischen $L^p(I;L^p(\Omega))$ und $L^p(I\times\Omega)$)
Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-messbare Menge. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Falls $p\in[1,\infty)$, dann ist die Abbildung $\widetilde{(\cdot)}\colon L^p(I\times\Omega)\to L^p(I;L^p(\Omega))$, für alle $u\in L^p(I\times\Omega)$ definiert durch
$$\widetilde{u}(t):=u(t,\cdot)\quad\text{ in } L^p(\Omega)\quad\text{ für f.a. } t\in I\,,$$
ein isometrischer Isomorphismus.

(ii) Falls $p=\infty$, dann ist die (inverse) Abbildung $\widetilde{(\cdot)}^{-1}\colon L^\infty(I;L^\infty(\Omega))\to L^\infty(I\times\Omega)$, für alle $\tilde{u}\in L^\infty(I;L^\infty(\Omega))$ definiert durch
$$u(t,x):=[\widetilde{u}(t)](x)\quad\text{ für f.a. } (t,x)^\top\in I\times\Omega\,,$$
eine Isometrie.

Bemerkung 2.20
In Beispiel 1.40 haben wir bereits eine Funktion kennen gelernt, die in $L^\infty((0,1))\times(0,1))$ liegt, aber nicht in $L^\infty((0,1);L^\infty(0,1))$, da sich nicht fast separabelwertig und damit nicht Bochner-messbar. Daher ist die Abbildung in Satz 2.19(ii) nur eine Isometrie und kein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. <u>*Zu (i).*</u> <u>*1. Wohldefiniertheit und Isometrie:*</u> Sei $u\in L^p(I\times\Omega)$ beliebig, aber fest. Wir wollen zeigen, dass $\widetilde{u}\in L^p(I;L^p(\Omega))$. Zunächst stellen wir fest, dass nach dem Satz von Fubini–Tonelli (*cf.* [Els09, §2, Satz 2.1, S. 175]) aus $|u|^p\in L^1(I\times\Omega)$ folgt, dass $|u(t,\cdot)|^p\in L^1(\Omega)$ für fast alle $t\in I$ mit
$$\int_I\left(\int_\Omega|u(t,x)|^p\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_{I\times\Omega}|u(t,x)|^p\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\,.$$
Mit anderen Worten gilt $\widetilde{u}(t)\in L^p(\Omega)$ für fast alle $t\in I$ mit
$$\int_I\|\widetilde{u}(t)\|_{L^p(\Omega)}^p\,\mathrm{d}t=\int_{I\times\Omega}|u(t,x)|^p\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x<\infty\,,\tag{2.21}$$
sodass nur noch die Bochner-Messbarkeit zu zeigen bleibt:

Da $L^p(\Omega)$ separabel ist, reicht es laut dem Satz von Pettis (*cf.* Satz 1.31) zu zeigen, dass $\widetilde{u}\colon I\to L^p(\Omega)$ schwach messbar ist. Sei dazu $f\in(L^p(\Omega))^*$ beliebig, aber fest. Weiter sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Intervallen, sodass $I_n\subseteq I_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $I=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$. Dann gilt, dass $(f\chi_{I_n})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{S}(I;(L^p(\Omega))^*)\subseteq L^{p'}(I;(L^p(\Omega))^*)$. Nach der Hölder'schen Ungleichung (*cf.* Satz 2.3) gilt, dass $(\langle f\chi_{I_n}(\cdot),\widetilde{u}(\cdot)\rangle_{L^p(\Omega)})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq L^1(I)$, d.h. insbesondere gilt dann für alle $n\in\mathbb{N}$, dass $\langle f\chi_{I_n}(\cdot),\widetilde{u}(\cdot)\rangle_{L^p(\Omega)}=\langle f,\widetilde{u}(\cdot)\chi_{I_n}(\cdot)\rangle_{L^p(\Omega)}\in L^0(I)$.

Mit anderen Worten ist $(\widetilde{u}\chi_{I_n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^0(I;L^p(\Omega))$. Da auf der anderen Seite gilt, dass

$$\widetilde{u}(t)\chi_{I_n}(t) \to u(t) \quad \text{ in } L^p(\Omega) \quad (n\to\infty) \quad \text{ für f.a. } t\in I\,,$$

folgt aus Korollar 1.37, dass $\widetilde{u} \in L^0(I;L^p(\Omega))$ und mit (2.21), dass $\widetilde{u} \in L^p(I;L^p(\Omega))$ mit

$$\|\widetilde{u}\|_{L^p(I;L^p(\Omega))} = \|u\|_{L^p(I\times\Omega)}\,, \tag{2.22}$$

d.h. die Abbildung $\widetilde{(\cdot)}\colon L^p(I\times\Omega)\to L^p(I;L^p(\Omega))$ ist wohldefiniert und eine Isometrie.

1. Surjektivität: Sei $U\in L^p(I;L^p(\Omega))$ beliebig, aber fest. Nach Korollar 2.11 existiert eine Folge $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M(C_c^\infty(I), C_c^\infty(\Omega))$, sodass

$$\tilde{u}_n \to U \quad \text{ in } L^p(I;L^p(\Omega)) \quad (n\to\infty)\,.$$

Wir definieren die Folge $u_n\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, durch

$$u_n(t,x) \coloneqq [\tilde{u}_n(t)](x) \quad \text{ für f.a. } (t,x)^\top \in I\times\Omega\,.$$

Da die Folgeglieder von $\tilde{u}\in L^p(I;L^p(\Omega))$ Linearkombinationen von Elementen aus $C_c^\infty(I)$ und $C_c^\infty(\Omega)$ sind, gilt insbesondere, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(I\times\Omega)$ (Übung). Da $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;L^p(\Omega))$ eine Cauchy-Folge ist, folgt aus (2.22), dass auch $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(I\times\Omega)$ eine Cauchy-Folge ist. Da $L^p(I\times\Omega)$ eine Banach-Raum ist, existiert ein Element $u\in L^p(I\times\Omega)$, sodass

$$u_n \to u \quad \text{ in } L^p(I\times\Omega) \quad (n\to\infty)\,.$$

Wegen der Isometrieeigenschaft gilt weiter, dass $\widetilde{u_n}\to\tilde{u}$ in $L^p(I;L^p(\Omega))$ $(n\to\infty)$. Die Eindeutigkeit des Grenzwert liefert, dass $U=\tilde{u}$ in $L^p(I;L^p(\Omega))$, d.h. die Abbildung $\widetilde{(\cdot)}\colon L^p(I\times\Omega)\to L^p(I;L^p(\Omega))$ ist surjektiv und damit ein isometrischer Isomorphismus.

Zu (ii). Sei $\tilde{u}\in L^\infty(I;L^\infty(\Omega))$ beliebig, aber fest. Nach Definition 2.1 und Definition 1.2 existiert eine Folge $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;L^\infty(\Omega))$, sodass

$$\tilde{u}_n(t)\to\tilde{u}(t) \quad \text{ in } L^\infty(\Omega) \quad \text{ für f.a. } t\in I\,.$$

Wir definieren die Folge $u_n\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, durch

$$u_n(t,x) \coloneqq [\tilde{u}_n(t)](x) \quad \text{ für f.a. } (t,x)^\top \in I\times\Omega\,.$$

Dann gilt, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(I\times\Omega)$ (Übung). Insbesondere existiert (*cf.* [Bré11, Theorem IV.9, S. 58]) eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$ und eine Lebesgue-messbare Menge $N\subseteq I\times\Omega$ mit $\lambda^{d+1}(N)=0$, sodass $(u_{n_k}(t,x))_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ für fast alle $(t,x)^\top\in I\times\Omega$ eine Cauchy-Folge ist. Insbesondere existiert zu jedem $(t,x)^\top\in(I\times\Omega)\setminus N$ ein $u_{(t,x)^\top}\in\mathbb{R}$, sodass

$$u_{n_k}(t,x)\to u_{(t,x)^\top} \quad (k\to\infty)\,.$$

Definiere wir dann die Funktion $u\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}$, für alle $(t,x)^\top\in I\times\Omega$, durch

$$u(t,x) \coloneqq \begin{cases} u_{(t,x)^\top} & \text{falls } (t,x)^\top\in(I\times\Omega)\setminus N\,,\\ 0 & \text{falls } (t,x)^\top\in N\,,\end{cases}$$

dann ist $u\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}$ als f.ü. Grenzwert Lebesgue-messbarer Funktionen selbst Lebesgue-messbar, d.h. $u\in L^0(I\times\Omega)$. Die Isometrieeigenschaft folgt aus $|u(t,x)| = |[\tilde{u}(t)](x)| \le \|\tilde{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|\tilde{u}\|_{L^\infty(I;L^\infty(\Omega))}$ und $|[\tilde{u}(t)](x)| = |u(t,x)| \le \|u\|_{L^\infty(I\times\Omega)}$ für fast alle $t\in I$. $\square$

3 Charakterisierung der Dualräume und Reflexivität

3.1 Charakterisierung der Dualräume

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, und $1 \leq p < \infty$ so wissen wir, dass wir den Dualraum $(L^p(\Omega))^*$ von $L^p(\Omega)$ mit dem Raum $L^{p'}(\Omega)$ identifizieren können. Genauer ist die sogenannte *Riesz-Abbildung* $R\colon L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$, für alle $f \in L^{p'}(\Omega)$ und $u \in L^p(\Omega)$ definiert durch

$$\langle Rf, u \rangle_{L^p(\Omega)} := \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ein isometrischer Isomorphismus, d.h. für alle $u^* \in (L^p(\Omega))^*$ existiert ein eindeutiges $f \in L^{p'}(\Omega)$, sodass

$$\begin{aligned} u^* &= Rf \quad \text{ in } (L^p(\Omega))^*\,,\\ \|u^*\|_{(L^p(\Omega))^*} &= \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Ein analoges Resultat wollen wir für Bochner–Lebesgue-Räume beweisen. Die erste Idee dabei ist, die wir bereits für die Hölder'sche Ungleichung (*cf.* Satz 2.3) ausgenutzt haben, besteht darin skalare Multiplikation $f(\cdot)u(\cdot)$ durch die duale Paarung $\langle f(\cdot), u(\cdot)\rangle_X$ zu ersetzen. Insbesondere folgt aus Hölder'schen Ungleichung (*cf.* Satz 2.3) bereits die Wohldefiniertheit, Linearität und Stetigkeit (mit Konstante 1) der Riesz-Abbildung für Bochner–Lebesgue-Räume.

Korollar 3.1 (Riesz-Abbildung)
Sei $p \in [1,\infty)$. Dann ist die Riesz-Abbildung $R_X\colon L^{p'}(I, X^*) \to (L^p(I;X))^*$, *für alle $f \in L^{p'}(I;X^*)$ und $u \in L^p(I;X)$ definiert durch*

$$\langle R_X f, u \rangle_{L^p(I;X)} := \int_I \langle f(t), u(t)\rangle_X\,\mathrm{d}t\,,$$

wohldefiniert, linear und Lipschitz-stetig mit Konstante kleiner gleich 1, d.h. für alle $f \in L^{p'}(I, X^*)$ gilt, dass

$$\|R_X f\|_{(L^p(I;X))^*} \leq \|f\|_{L^{p'}(I,X^*)}\,.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 2.3. □

Das folgende Theorem zeigt unter welchen Voraussetzungen an den Raum X die Riesz-Abbildung für Bochner–Lebesgue-Räume (*cf.* Korollar 3.1) ein isometrischer Isomorphismus ist.

Theorem 3.2 (Charakterisierung von $(L^p(I;X))^*$)
Sei $p \in [1,\infty)$ und X reflexiv oder X^* separabel. Dann ist $R_X \colon L^{p'}(I,X^*) \to (L^p(I;X))^*$ ein isometrischer Isomorphismus, d.h. für alle $u^* \in (L^p(I;X))^*$ existiert ein eindeutiges $f \in L^{p'}(I,X^*)$, sodass

$$\begin{aligned} u^* = R_X f \quad &\textit{in } (L^p(I;X))^*\,, \\ \|u^*\|_{(L^p(I;X))^*} &= \|f\|_{L^{p'}(I,X^*)}\,. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [Edw65, Chapter 8, Theorem 8.20.3, p. 606 (für X^* separabel) & Theorem 8.20.5, p. 607 (für X reflexiv)]. □

3.2 Reflexivität

Mit Hilfe von Theorem 3.2 können wir nun die anfangs gestellte Frage nach der Reflexivität von Bochnerräumen beantworten.

Theorem 3.3 (Reflexivität von $L^p(I;X)$)
Sei $p \in (1,\infty)$ und X reflexiv. Dann ist $L^p(I;X)$ reflexiv.

Beweis. Ziel: Die kanonische Isometrie $J_{L^p(I;X)} \colon L^p(I;X) \to (L^p(I;X))^{**}$, für alle $u \in L^p(I;X)$ und $u^* \in (L^p(I;X))^*$ definiert durch

$$\langle J_{L^p(I;X)} u, u^* \rangle_{(L^p(I;X))^*} \coloneqq \langle u^*, u \rangle_{L^p(I;X)}\,.$$

ist surjektiv.

Beweis des Ziels: Da X reflexiv ist, sind die folgenden Operatoren isometrische Isomorphismen:

- Da X reflexiv ist, die kanonische Isometrie $J_X \colon X \to X^{**}$, für alle $x \in X$ und $x^* \in X^*$, definiert durch

  $$\langle J_X x, x^* \rangle_{X^*} \coloneqq \langle x^*, x \rangle_X\,,$$

  ein isometrische Isomorphismus. Dann ist insbesondere auch der linear-induzierte Operator

  $$\mathcal{J}_X \colon L^p(I;X) \to L^p(I,X^{**})\,,$$

  für alle $u \in L^p(I;X)$ definiert durch

  $$(\mathcal{J}_X u)(t) \coloneqq J_X(u(t)) \quad \text{in } X^{**} \quad \text{für f.a. } t \in I\,,$$

  ein isometrischer Isomorphismus (Übung).

- Nach Theorem 3.2 ist die Riesz-Abbildung $R_X\colon L^{p'}(I, X^*) \to (L^p(I; X))^*$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Dann ist die Inverse $R_X^{-1}\colon (L^p(I; X))^* \to L^{p'}(I, X^*)$ ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus. Der Satz von Schauder (*cf.* ??) liefert weiter, dass der adjungierte Operator
$$(R_X^{-1})^*\colon (L^{p'}(I, X^*))^* \to (L^p(I; X))^{**}$$
ein isometrischer Isomorphismus ist.
- Nach Theorem 3.2 ist die Riesz-Abbildung
$$R_{X^*}\colon L^p(I, X^{**}) \to (L^{p'}(I, X^*))^*$$
ein isometrischer Isomorphismus.

Nun haben wir alle Hilfsmittel beisammen um zu zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L^p(I; X) \arrow[r, "J_{L^p(I;X)}"] \arrow[d, "\mathcal{J}_X"] & (L^p(I; X))^{**} \\
L^p(I, X^{**}) \arrow[r, "R_{X^*}"'] & (L^{p'}(I, X^*))^* \arrow[u, "(R_X^{-1})^*"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.1: Kommutierendes Diagramm

kommutiert. In der Tat gilt für alle $u^* \in (L^p(I; X))^*$ und $u \in L^p(I; X)$, dass
$$\begin{aligned}
\langle J_{L^p(I;X)}u, u^*\rangle_{(L^p(I;X))^*} &= \langle u^*, u\rangle_{L^p(I;X)} \\
&= \int_I \langle (R_X^{-1}u^*)(t), u(t)\rangle_X \,\mathrm{d}t \\
&= \int_I \langle (J_X u)(t), (R_X^{-1}u^*)(t)\rangle_{X^*} \,\mathrm{d}t \\
&= \langle R_{X^*}(J_X u), R_X^{-1}u^*\rangle_{L^{p'}(I,X^*)} \\
&= \langle (R_X^{-1})^* R_{X^*}(\mathcal{J}_X u), R_X^{-1}u^*\rangle_{(L^p(I,X))^*} \\
&= \big\langle \big((R_X^{-1})^* \circ R_{X^*} \circ \mathcal{J}_X\big)\, u, u^*\big\rangle_{(L^p(I;X))^*} \,,
\end{aligned}$$
d.h. die kanonische Isometrie
$$J_{L^p(I;X)} = (R_X^{-1})^* \circ R_{X^*} \circ \mathcal{J}_X\colon L^p(I; X) \to (L^p(I; X))^{**}$$
ist als Verknüpfung isometrischer Isomorphismen selbst ein isometrischer Isomorphismus. □

Theorem 3.4 (Gleichmäßige Konvexität)
Sei $p \in (1, \infty)$ und X gleichmäßig konvex. Dann ist $L^p(I; X)$ gleichmäßig konvex.

Beweis. Siehe [GGZ74, Kapitel IV, Satz 1.15, p. 136]. □

4 Verallgemeinerte Zeitableitung und Bochner–Sobolev–Räume

Für das gesamte Kapitel sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

4.1 Verallgemeinerte Zeitableitung

Definition 4.1 (Verallgemeinerte Zeitableitung)
Seien X, Y Banachräume, sodass eine Einbettung $j\colon X \to Y$ existiert. Dann hat eine Funktion $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$ eine verallgemeinerte Zeitableitung (bzgl. j)*, falls eine Funktion $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;Y)$ existiert, sodass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass*

$$j\bigg(-\int_I u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\bigg) = \int_I v(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{in } Y\,.$$

Wir setzen dann $\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t} := v$ als die verallgemeinerte Zeitableitung (bzgl. j) *und $W^{1,1}_{j,\mathrm{loc}}(I;X,Y)$ als den* Raum aller verallgemeinerte zeitlich differenzierbaren Funktionen auf I (bzgl. j)*. Im Fall $X = Y$ und $j = \mathrm{id}_X$, setzen wir $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} := \frac{\mathrm{d}_{\mathrm{id}_X} u}{\mathrm{d}t}$ und $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I;X) := W^{1,1}_{\mathrm{id}_X,\mathrm{loc}}(I;X,X)$.*

Bemerkung 4.2 (Schwache Zeitableitung)
Die verallgemeinerte Zeitableitung im Sinne von Definition 4.1 ist von der schwachen Zeitableitung zu unterscheiden: genauer hat eine Funktion $u\colon I \to X$ eine schwache Zeitableitung (bzgl. j) *in $t \in I$, falls ein $\mathrm{d}_t^j u(t) \in Y$ existiert, sodass*

$$j\bigg(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\bigg) \rightharpoonup \mathrm{d}_t^j u(t) \qquad \textit{in } Y \quad (h \to 0, t+h \in I)\,.$$

Lemma 4.3 (Eindeutigkeit/Wohldefiniertheit der verallgemeinerten Zeitableitung)
Die verallgemeinerte Zeitableitung im Sinne von Definition 4.1 ist eindeutig bestimmt und damit wohldefiniert.

Die Eindeutigkeit und damit Wohldefiniertheit der verallgemeinerten Zeitableitung im Sinne von Definition 4.1 beruht auf dem folgenden Analogon der Fundamentallemmas der Variationsrechnung für Funktionen aus $L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$.

Lemma 4.4 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)
Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$, sodass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$\int_I u(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \textit{in } X\,.$$

Dann gilt $u(t) = 0$ in X für f.a. $t \in I$.

Beweis. Sei $K \subseteq I$ ein kompaktes Intervall und setze

- $\delta := \frac{1}{2}\mathrm{dist}(K, \mathbb{R} \setminus I)$;
- $a := \inf K - \delta$;
- $b := \sup K + \delta$.

Dann gilt für alle $h \in (0, \delta)$ und $t \in K$ wegen $\omega_h(t - \cdot) \in C_0^\infty(-h, h) \subseteq C_c^\infty(a, b)$, dass

$$\left.\begin{aligned}(\mathcal{S}^h_{(a,b)}u)(t) &= \int_{B^1_h(t)} (\mathcal{E}_{(a,b)}u)(s)\,\omega_h(t-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b u(s)\,\omega_h(t-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_I u(s)\,\omega_h(t-s)\,\mathrm{d}s = 0\end{aligned}\right\} \quad \text{in } X\,.$$

Wegen $\mathcal{S}^h_{(a,b)}u \to u|_{(a,b)}$ in $L^1((a,b); X)$ $(h \to 0)$ (*cf.* Satz 2.15(iii)) folgt, dass $\mathcal{S}^h_{(a,b)}u|_K = 0 \to u|_K$ $L^1(K; X)$ $(h \to 0)$ für f.a. $t \in K$ und somit $u(t) = 0$ in X für f.a. $t \in K$ und alle kompakten Intervalle $K \subseteq I$. Schließlich folgt, dass $u(t) = 0$ in X für f.a. $t \in I$. □

Beweis (von Lemma 4.3). Seien $v_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(I; Y)$, $i = 1, 2$, sodass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ und $i = 1, 2$ gilt, dass

$$j\Big(-\int_I u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_I v_i(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{in } Y\,.$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$, dass

$$\int_I (v_1(t) - v_2(t))\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{in } Y\,.$$

Das Fundamentallemma (*cf.* Lemma 4.4) liefert unmittelbar, dass $v_1 = v_2$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(I; Y)$. □

Die folgende Proposition zeigt, dass das Verschwinden der verallgemeinerten Zeitableitung im Sinne von Definition 4.1 (wie im Fall der klassischen Zeitableitung im Sinne von Definition 1.25) die Konstanz der Funktion zur Folge hat.

Lemma 4.5 ($\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow u = \mathrm{const}$)
Seien X, Y Banachräume, sodass eine Einbettung $j\colon X \to Y$ existiert. Weiter sei $u \in W^{1,1}_{j,\mathrm{loc}}(I; X, Y)$ mit verschwindender verallgemeinerter Zeitableitung $\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t} = 0$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(I; Y)$, d.h. für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$j\Big(\int_I u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big) = 0 \quad \text{in } Y\,.$$

Dann existiert ein $u_0 \in X$, sodass $u(t) = u_0$ in X für f.a. $t \in I$.

Bemerkung 4.6

Wegen der Injektivität von $j\colon X \to Y$ *verschwindet für eine Funktion* $u \in W^{1,1}_{j,\mathrm{loc}}(I;X,Y)$ *die verallgemeinerter Zeitableitung (bzgl.* j*), d.h. es gilt* $\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t} = 0$ *in* $L^1_{\mathrm{loc}}(I;Y)$*, genau dann, wenn für alle* $\varphi \in C^\infty_c(I)$ *gilt, dass*

$$\int_I u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \textit{in } X\,.$$

Beweis (von Lemma 4.5). Zunächst sehen wir ein, dass für alle $\varphi \in C^\infty_c(I)$ mit $\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ gilt, dass

$$\int_I u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_I u(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg(\underbrace{\int_{\inf I}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}_{\in C^\infty_c(I)}\bigg)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{in } X\,.$$

Definieren wir

$$u_0 := \int_I u(t)\eta(t)\,\mathrm{d}t \in X\,, \qquad \text{wobei } \eta \in C^\infty_c(I) \text{ mit } \int_I \eta(t)\,\mathrm{d}t = 1\,,$$

dann gilt für alle $\varphi \in C^\infty_c(I)$, dass

$$\left.\begin{aligned}
\int_I (u(t) - u_0)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_I u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_I\int_I u(s)\eta(s)\varphi(t)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_I u(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s - \int_I u(s)\eta(s)\bigg(\int_I \varphi(t)\mathrm{d}t\bigg)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_I u(s)\bigg(\underbrace{\varphi(s) - \eta(s)\int_I \varphi(t)\mathrm{d}t}_{=:\psi \in C^\infty_c(I) \text{ mit } \int_I \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0}\bigg)\,\mathrm{d}s \\
&= 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{in } X\,.$$

Das Fundamentallemma (*cf.* Lemma 4.4) liefert dann, dass $u(t) = u_0$ in X für f.a. $t \in I$. □

Lemma 4.7 (Beziehung zur klassischen Zeitableitung)

(i) Konsistenz: *Falls* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X)$*, sodass* $ju \in C^1(I;Y)$*, wobei* $(ju)(t) := j(u(t))$ *in* Y *für f.a.* $t \in I$*, dann gilt, dass* $u \in W^{1,1}_{j,\mathrm{loc}}(I;X,Y)$ *und die klassische Zeitableitung stimmt mit der verallgemeinerten Zeitableitung überein.*

(ii) Produktregel: *Für alle* $u \in W^{1,1}_{j,\mathrm{loc}}(I;X,Y)$ *und* $\eta \in C^\infty(I)$ *gilt, dass*

$$\frac{\mathrm{d}_j(u\eta)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t}\eta + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}ju \qquad \textit{in } L^1_{\mathrm{loc}}(I;Y)\,,$$

wobei $ju \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;Y)$ *für f.a.* $t \in I$ *durch* $(ju)(t) = j(u(t))$ *in* Y *definiert ist.*

Beweis. (Übung). □

Der linear-induzierte Operator $\mathcal{A}\colon L^1_{\text{loc}}(I;X)\to L^1_{\text{loc}}(I;Y)$ (*cf.* Satz 1.21) ist stabil unter verallgemeiner-ter zeitlicher Differenzierbarkeit und kommutiert mit der verallgemeinerten Zeitableitung.

Satz 4.8 (Linear-induzierter Operator)
Sei $A\colon X\to Y$ ein linear und stetiger Operator. Dann ist der linear-induzierte Operator $\mathcal{A}\colon W^{1,1}_{\text{loc}}(I;X)\to W^{1,1}_{\text{loc}}(I;Y)$, für alle $u\in W^{1,1}_{\text{loc}}(I;X)$ definiert durch

$$(\mathcal{A}u)(t)=A(u(t))\qquad \text{in } Y\qquad \text{für f.a. } t\in I\,,$$

ist wohldefiniert. Insbesondere gilt für alle $u\in W^{1,1}_{\text{loc}}(I;X)$, dass

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}u}{\mathrm{d}t}=\mathcal{A}\Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Big)\qquad \text{in } L^1_{\text{loc}}(I;Y)\,,$$

d.h. der linear-induzierte Operator kommutiert mit der verallgemeinerten Zeitableitung (cf. Abbildung 4.1).

$$\begin{tikzcd} W^{1,1}_{\text{loc}}(I;X) \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "\frac{\mathrm{d}\,\cdot}{\mathrm{d}t}"] & W^{1,1}_{\text{loc}}(I;Y) \arrow[d, "\frac{\mathrm{d}\,\cdot}{\mathrm{d}t}"] \\ L^1_{\text{loc}}(I;X) \arrow[r, "\mathcal{A}"'] & L^1_{\text{loc}}(I;Y) \end{tikzcd}$$

Abbildung 4.1: Kommutatives Diagramm.

Beweis (von Satz 4.8). Sei $u\in W^{1,1}_{\text{loc}}(I;X)$ beliebig, aber fest. Dann gilt für alle $\varphi\in C^\infty_c(I)$ mit Definition 4.1 und Satz 1.21, dass

$$\left.\begin{aligned} -\int_I(\mathcal{A}u)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= A\Big(-\int_I u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big)\\ &= A\Big(\int_I \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\Big)\\ &= \int_I \mathcal{A}\Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Big)(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\Big) \end{aligned}\right\}\quad \text{in } Y\,,$$

d.h. $\mathcal{A}u\in W^{1,1}_{\text{loc}}(I;Y)$ mit $\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}u}{\mathrm{d}t}=\mathcal{A}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})$ in $L^1_{\text{loc}}(I;Y)$. □

Korollar 4.9
Seien X, Y Banach-Räume, sodass eine Einbettung $j\colon X\to Y$ existiert. Dann gilt für alle $u\in W^{1,1}_{\text{loc},j}(I;X,Y)$, dass $ju\in W^{1,1}_{\text{loc}}(I;Y)$ mit

$$\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}ju}{\mathrm{d}t}=j\Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Big)\qquad \text{in } L^1_{\text{loc}}(I;Y)\,,$$

wobei $ju\in L^1_{\text{loc}}(I;Y)$ für f.a. $t\in I$ durch $(ju)(t)=j(u(t))$ in Y definiert ist.

Beweis. (Übung). □

4.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Auch für Bochner-integrierbare Funktionen gilt der Zusammenhang zwischen absoluter Stetigkeit und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Definition 4.10 (Absolutstetigkeit, Vitali, 1905)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Dann heißt eine Funktion $u\colon \overline{I} \to X$ absolut stetig*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gilt, sodass für jedes endliche System disjunkter Teilintervalle $[a_i, b_i] \subseteq \overline{I}$, $i = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, mit Gesamtlänge $\sum_{i=0}^{m} (b_i - a_i) < \delta$ gilt, dass*

$$\sum_{i=0}^{m} \|u(b_i) - u(a_i)\|_X < \varepsilon\,.$$

Dann bezeichnen wir mit $AC(\overline{I}; X)$ die Menge der absolut stetigen Funktionen auf $\overline{I}$ mit Werten in X*.*

Bemerkung 4.11 (Beziehung zu anderen Stetigkeitsbegriffen)
(i) Ist $u\colon \overline{I} \to X$ Lipschitz stetig, d.h. es existiert ein $L > 0$, sodass

$$\|u(t) - u(s)\|_X \le L\,|t - s| \quad \text{für alle } t, s \in I\,,$$

dann ist $u\colon \overline{I} \to X$ absolut stetig.
(ii) Ist $u\colon \overline{I} \to X$ absolut stetig, dann ist $u\colon \overline{I} \to X$ gleichmäßig stetig.

Satz 4.12 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil I)
Es gelten die folgenden Aussagen:
(i) Falls $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(I; X)$ und $t' \in I$, dann ist die Funktion $u_c\colon I \to X$, definiert durch

$$u_c(t) \coloneqq \int_{t'}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für alle } t \in I\,,$$

lokal absolut stetig, d.h. $u_c \in AC(K; X)$ für alle kompakten Intervalle $K \subseteq I$, und verallgemeinert zeitlich differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t) = v(t) \quad \text{in } X \quad \text{für f.a. } t \in I\,. \tag{4.13}$$

(ii) Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, $v \in L^1(I; X)$ und $t' \in \overline{I}$, dann ist die Funktion $u_c\colon \overline{I} \to X$, definiert durch

$$u_c(t) \coloneqq \int_{t'}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für alle } t \in \overline{I}\,,$$

absolut stetig, d.h. $u_c \in AC(\overline{I}; X)$, und verallgemeinert zeitlich differenzierbar mit (4.13).

Beweis. *Zu (i).*

1. Lokale Absolutstetigkeit: Sei $K \subseteq I$ ein kompaktes Intervall. Dann folgt die Absolutstetigkeit von $u_c \colon K \to X$ aus der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals, denn für jedes endliche System disjunkter Teilintervalle $[a_i, b_i] \subseteq K$, $i = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, gilt wegen Korollar 1.19(ii), dass

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \|u_c(b_i) - u_c(a_i)\|_X &= \sum_{i=1}^{m} \left\| \int_{a_i}^{b_i} v(s)\,\mathrm{d}s \right\|_X \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \int_{a_i}^{b_i} \|v(s)\|_X\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

2. Verallgemeinerte Differenzierbarkeit: Für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$\left.\begin{aligned} -\int_I u_c(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_I \left(\int_{t'}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s \right) \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_I \int_I \chi_{(t',\sup I)}(t)\chi_{(t',t)}(s)v(s)\varphi'(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_I \int_I \chi_{(\inf I,t')}(t)\chi_{(t,t')}(s)v(s)\varphi'(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_I \int_I \chi_{(t',\sup I)}(s)\chi_{(s,\sup I)}(t)v(s)\varphi'(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_I \int_I \chi_{(\inf I,t')}(s)\chi_{(\inf I,s)}(t)v(s)\varphi'(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{t'}^{\sup I} v(s) \left(\int_s^{\sup I} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{\inf I}^{t'} v(s) \left(\int_{\inf I}^{s} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_{t'}^{\sup I} v(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s + \int_{\inf I}^{t'} v(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_I v(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned}\right\} \quad \text{in } X\,,$$

wobei wir im zweiten Gleichheitszeichen die Identitäten (Übung)

$$\begin{aligned} \chi_{(t',\sup I)}(t)\chi_{(t',t)}(s) &= \chi_{(t',\sup I)}(s)\chi_{(s,\sup I)}(t) \qquad \text{für alle } t,s \in I\,, \\ \chi_{(\inf I,t')}(t)\chi_{(t,t')}(s) &= \chi_{(\inf I,t')}(s)\chi_{(\inf I,s)}(t) \qquad \text{für alle } t,s \in I\,, \end{aligned}$$

und im vorletzten Gleichheitszeichen den klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Tatsache, dass φ einen kompakten Träger in I hat, ausgenutzt haben.

Zu (ii). Folgt analog zu (i) (Übung). □

Satz 4.14 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil II)
Für jedes $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I;X)$ existiert ein eindeutiger stetiger Repräsentant $u_c \in C^0(I;X)$. Insbesondere gilt für alle $t, t' \in I$, dass

$$u_c(t) = u_c(t') + \int_{t'}^{t} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{in } X\,. \tag{4.15}$$

Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist und $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^1(I;X)$, dann gilt, dass $u_c \in AC(\overline{I};X)$ mit (4.15) für alle $t, t' \in \overline{I}$.

Beweis. *1. Fall: ($I \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt oder $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \notin L^1(I;X)$).* Sei zunächst $t' \in I$ beliebig, aber fest. Aus Satz 4.12(i) folgt, dass die Funktion $v\colon I \to X$, für alle $t \in I$ definiert durch

$$v(t) := \int_{t'}^{t} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

lokal absolut stetig ist, in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I;X)$ liegt und

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \qquad \text{in } X \qquad \text{für f.a. } t \in I$$

erfüllt. Wegen der Linearität der verallgemeinerten Zeitableitung gilt, folgt zusammen mit Lemma 4.5, dass ein $u_0 \in X$ existiert, sodass $u(t) = u_0 + v(t)$ in X für f.a. $t \in I$. Da $v\colon I \to X$ lokal absolut stetig ist, ist $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I;X)$ f.ü. gleich der stetigen Funktion $u_c := u_0 + v\colon I \to X$. Schließlich folgt wegen $u_c(t') = u_0 + v(t') = u_0$ in X, dass für alle $t, t' \in I$ gilt, dass

$$u_c(t) = u_0 + v(t) = u_c(t') + \int_{t'}^{t} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{in } X\,.$$

2. Fall: ($I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^1(I;X)$). Wir gehen analog zum vorherigen Fall vor, nutzen nun allerdings Satz 4.12(ii). □

Allgemeiner gilt

Satz 4.16 (von Kōmura, 1967)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und X reflexiv. Dann ist jedes $u \in AC(\overline{I};X)$ für f.a. $t \in I$ klassisch differenzierbar mit Ableitung $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \in X$ und die resultierende Funktion $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\colon I \to X$ ist Bochner-integrierbar. Insbesondere gilt für alle $t', t \in \overline{I}$, dass

$$u(t) = u(t') + \int_{t'}^{t} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{in } X\,.$$

Beweis. Siehe [Bré73, Cor. A.2]. □

4.3 Bochner–Sobolev-Räume

Definition 4.17 (Bochner–Sobolev-Räume)
Seien X, Y Banach-Räume, $j\colon X \to Y$ eine Einbettung und $1 \le p, q \le \infty$. Dann ist der Bochner–Sobolev-Raum (bzgl. j) *definiert durch*

$$W_j^{1,p,q}(I; X, Y) := \left\{ u \in L^p(I; X) \;\middle|\; \exists \frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t} \in L^q(I; Y) \right\}.$$

Falls $X = Y$ und $j = \mathrm{id}_X$, dann setzen wir

$$W^{1,q}(I, X) := W_{\mathrm{id}_X}^{1,p,q}(I; X, Y) .$$

Aus der Vollständigkeit von Bochner–Lebesgue-Räumen (*cf.* Theorem 2.5) und der Stetigkeit von $\frac{\mathrm{d}_j}{\mathrm{d}t}$ folgt direkt die Vollständigkeit von Bochner–Sobolev-Räumen.

Theorem 4.18 (Vollständigkeit)
Für $p, q \in [1, \infty]$ ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ ausgestattet mit der Norm

$$\| \cdot \|_{W_j^{1,p,q}(I;X,Y)} := \| \cdot \|_{L^p(I;X)} + \left\| \frac{\mathrm{d}_j \,\cdot}{\mathrm{d}t} \right\|_{L^p(I;X)} ,$$

ein Banach-Raum.

Beweis. *1. Vektorraumeigenschaften:* (Übung).

2. Vollständigkeit: Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ ein Cauchy-Folge. Dann sind sowohl $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$ als auch $(\frac{\mathrm{d}_j u_n}{\mathrm{d}t})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^q(I; Y)$ Cauchy-Folgen. Da $L^p(I; X)$ und $L^q(I; Y)$ vollständig sind (*cf.* Theorem 2.5), existieren $u \in L^p(I; X)$ und $v \in L^q(I; Y)$, sodass

$$\begin{aligned} u_n &\to u && \text{in } L^p(I; X) && (n \to \infty) , \\ \frac{\mathrm{d}_j u_n}{\mathrm{d}t} &\to v && \text{in } L^q(I; Y) && (n \to \infty) . \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$, dass

$$\left.\begin{aligned} j\Big(- \int_I u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \Big) &= \lim_{n\to\infty} j\Big(- \int_I u_n(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_I \frac{\mathrm{d}_j u_n}{\mathrm{d}t}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_I v(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \quad \text{in } Y ,$$

d.h. $u \in W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ mit $\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t} = v$ in $L^q(I; Y)$ und $u_n \to u$ in $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ $(n \to \infty)$. □

Aus der Separabilität/Reflexivität von Bochner–Lebesgue-Räumen (*cf.* Theorem 2.14, Theorem 3.3) folgt direkt die Separabilität/Reflexivität von Bochner–Sobolev-Räumen.

Theorem 4.19 (Separabilität & Reflexivität)

Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) Für $p, q \in [1, \infty)$ und separable Banach-Räume X, Y ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ separabel.

(ii) Für $p, q \in (1, \infty)$ und reflexive Banach-Räume X, Y ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ reflexiv.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass der Produktraum $\Sigma := L^p(I; X) \times L^q(I; Y)$ ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_\Sigma \colon \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, für alle $(u, v)^\top \in \Sigma$ definiert

$$\|(u, v)^\top\|_\Sigma := \|u\|_{L^p(I;X)} + \|v\|_{L^q(I;Y)}\,,$$

ein Banach-Raum ist (Übung). Weiter stellen wir fest, dass $\Pi \colon W_j^{1,p,q}(I; X, Y) \to \Sigma$, für alle $u \in W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ definiert durch

$$\Pi u := \left(u, \frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t}\right)^\top \quad \text{in } \Sigma\,,$$

eine lineare Isometrie ist. Insbesondere ist Bild $R(\Pi)$ ein Banach-Raum und die Abbildung $\Pi \colon W_j^{1,p,q}(I; X, Y) \to R(\Pi)$ ein isometrischer Isomorphismus auf sein Bild.

Zu (i). Für $p, q \in [1, \infty)$ und separable X, Y, sind $L^p(I; X)$ und $L^q(I; Y)$ separabel (*cf.* Theorem 2.14). Insbesondere ist dann auch der Produktraum Σ separabel und folglich das Bild $R(\Pi)$. Da Separabilität stabil unter Isomorphismen ist, ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ separabel.

Zu (ii). Für $p, q \in (1, \infty)$ und reflexive X, Y, sind $L^p(I; X)$ und $L^q(I; Y)$ reflexiv (*cf.* Theorem 2.14). Insbesondere ist dann auch der Produktraum Σ reflexiv und folglich das Bild $R(\Pi)$. Da Reflexivität stabil unter Isomorphismen ist, ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ reflexiv. □

$$\begin{tikzcd}
 & & L^p(I; X) \\
W_j^{1,p,q}(I; X, Y) \arrow[r, "\Pi"] & R(\Pi) \subseteq \Sigma \arrow[ur, "\mathrm{proj}_{L^p(I;X)}"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_{L^q(I;Y)}"] & \\
 & & L^q(I; Y)
\end{tikzcd}$$

Abbildung 4.2: Abbildungsdiagramm zum Beweis von Theorem 2.14.

Lemma 4.20 (Einbettung)

Falls $I \subseteq \mathrm{R}$ ein beschränktes Intervall ist, dann ist die aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (cf. Satz 4.14(ii)) resultierende Abbildung

$$(\cdot)_c \colon W^{1,1}(I; X) \to AC(\overline{I}; X) \subseteq C_b^0(I; X)\,,$$

die jeder Funktion $u \in W^{1,1}(I; X)$ ihren absolut stetigen Repräsentanten $u_c \in AC(\overline{I}; X)$ zuweist, eine Einbettung. Insbesondere gilt für alle $u \in W^{1,1}(I; X)$, dass

$$\|u_c\|_{C_b^0(I;X)} \leq \frac{1}{|I|}\|u\|_{L^1(I;X)} + \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^1(I;X)}.$$

Beweis. (Übung). □

4.4 Dichte Teilmengen

In diesem Abschnitt identifizieren wir einige wichtige dichte Teilmengen von Bochner–Sobolev-Räumen.

Lemma 4.21 (Spezielle dichte Teilmenge)
Sei $p \in [1,\infty)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge. Dann liegt die Menge

$$M(C^\infty(\bar{I}); D) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, d_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\,,\ \varphi_i \in C^\infty(\bar{I})\,,\ d_i \in D\,,\ i = 1,\dots n \right\}$$

dicht in $W^{1,p}(I;X)$.

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(I;X)$ beliebig, aber fest. Dann existiert laut Korollar 2.11 und wegen der Dichtheit von D in X Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M(C_c^\infty(I); D)$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, sodass

$$\begin{aligned} v_n &\to \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} && \text{in } L^p(I;X) && (n\to\infty)\,,\\ d_n &\to u_c(0) && \text{in } X && (n\to\infty)\,, \end{aligned}$$

wobei $u_c \in AC(\overline{I};X)$ der absolut stetige Repräsentant von $u \in W^{1,p}(I;X) \hookrightarrow W^{1,1}(I;X)$ (da $\lambda^1(I) < \infty$) aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (*cf.* Satz 4.14) ist. Wir definieren $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{I};X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$u_n(t) := d_n + \int_{\inf I}^{t} v_n(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in \overline{I}\,.$$

Dann gilt insbesondere, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M(C^\infty(\bar{I}); D)$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus

$$v_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} d_i^n \eta_i^n(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I\,,$$

wobei $k_n \in \mathbb{N}$, $d_i^n \in D$ und $\eta_i^n \in C_c^\infty(I)$, $i = 1,\dots,k_n$, $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_{\inf I}^{t} v_n(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{k_n} d_i^n \underbrace{\left(\int_{\inf I}^{t} \eta_i^n(s)\,\mathrm{d}s \right)}_{C^\infty(\overline{I})} \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in \overline{I}\,.$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (*cf.* Satz 4.14) folgt weiter, dass

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} &\to \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} && \text{in } L^p(I;X) && (n\to\infty)\,,\\ u_n = d_n + \int_{\inf I}^{(\cdot)} v_n(s)\,\mathrm{d}s &\to u_c(\inf I) + \int_{\inf I}^{(\cdot)} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(s)\,\mathrm{d}s = u_c && \text{in } C^0(\overline{I};X) && (n\to\infty)\,. \end{aligned}$$

Nutzen wir, dass $C^0(\overline{I};X) \hookrightarrow L^p(I;X)$ (da $\lambda^1(I) < \infty$), so folgt schließlich, dass $u_n \to u$ in $W^{1,p}(I;X)$ $(n\to\infty)$, d.h. M liegt dicht in $W^{1,p}(I;X)$. □

Theorem 4.22 (Fortsetzung durch Spiegelung)
Sei $I = (0, T)$, $0 < T < \infty$, $p, q \in [1, \infty]$ *und* $j\colon X \to Y$ *eine Einbettung. Für* $u \in L^p(I; X)$ *definieren wir die* Fortsetzung durch Spiegelung *für alle* $t \in 3I := (-T, 2T)$ *durch*

$$(\mathcal{F}_I u)(t) := \begin{cases} u(-t) & t \in (-T, 0)\,, \\ u(t) & t \in [0, T]\,, \\ u(2T - t) & t \in (T, 2T)\,. \end{cases}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $\mathcal{F}_I\colon L^p(I; X) \to L^p(3I; X)$ *ist wohldefiniert, linear und stetig.*

(ii) $\mathcal{F}_I^-\colon L^q(I; Y) \to L^q(3I; Y)$, *für alle* $v \in L^q(I; Y)$ *und* $t \in 3I$ *definiert durch*

$$(\mathcal{F}_I^- v)(t) := \begin{cases} -v(-t) & t \in (-T, 0)\,, \\ v(t) & t \in [0, T]\,, \\ -v(2T - t) & t \in (T, 2T)\,, \end{cases}$$

ist wohldefiniert, linear und stetig.

(iii) $\mathcal{F}_I\colon W_j^{1,p,q}(I; X, Y) \to W_j^{1,p,q}(3I; X, Y)$ *ist wohldefiniert, linear und stetig. Insbesondere gilt für alle* $u \in W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$, *dass*

$$\frac{\mathrm{d}_j \mathcal{F}_I u}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}_I^- \left(\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t} \right) \qquad \text{in } L^q(I; Y)\,.$$

Beweis. *Zu (i).*

1. Wohldefiniertheit: Sei $u \in L^p(I; X)$ beliebig, aber fest.

1.1 Bochner-Messbarkeit: Wegen Definition 1.2 existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, sodass

$$s_n(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Mittels einer Fallunterscheidung folgt dann, dass $(\mathcal{F}_I s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(3I; X)$ und

$$(\mathcal{F}_I s_n)(t) \to (\mathcal{F}_I u)(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in 3I\,,$$

d.h. $\mathcal{F}_I u \in L^0(3I; X)$.

1.2 p-Integrabilität: Wegen $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(I)$ folgt aus dem Transformationsatz, dass

$$\int_{3I} \|(\mathcal{F}_I u)(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t = 3 \int_I \|u(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t < \infty\,,$$

d.h. $\mathcal{F}_I u \in L^p(3I; X)$.

2. Linearität: Die Linearität folgt mit Hilfe einer Fallunterscheidung.

3. Stetigkeit: Für alle $u \in L^p(I; X)$ gilt, dass

$$\|\mathcal{F}_I u\|_{L^p(3I;X)} = 3^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(I;X)}\,.$$

Zu (ii). Bis auf offensichtliche Anpassungen gehen wir analog zu (i) vor.

Zu (iii). Sei $u \in W_j^{1,p,q}(I;X,Y)$ beliebig, aber fest. Der linear induzierte Operator $j\colon L^1(I;X) \to L^1(I,Y)$ ist eine Einbettung und es gilt $ju \in W^{1,1}(I;Y)$ mit

$$\frac{\mathrm{d}(ju)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t} \quad \text{in } L^1(I;Y)\,. \tag{4.23}$$

Wegen Lemma 4.21 existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\bar{I},Y)$, sodass

$$\begin{aligned} u_n &\to ju && \text{in } W^{1,q}(I;Y) && (n\to\infty)\,,\\ (u_n)_c = u_n &\to (ju)_c && \text{in } C^0(\overline{I};Y) && (n\to\infty)\,. \end{aligned}$$

Wegen des Hauptsatzes gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in C_c^\infty(3I)$, dass

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{0} u_n(-t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= u_n(0)\varphi(0) + \int_{-T}^{0} \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t && \text{in } Y\,,\\ \int_{0}^{T} u_n(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= [u_n(t)\varphi(t)]_{t=0}^{t=T} - \int_{0}^{T} \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t && \text{in } Y\,,\\ \int_{T}^{2T} u_n(2T-t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= -u_n(T)\varphi(T) + \int_{T}^{2T} \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(2T-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t && \text{in } Y\,. \end{aligned}$$

Addition der drei Gleichungen liefert für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in C_c^\infty(3I)$, dass

$$\int_0^T (\mathcal{F}_I u_n)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T \mathcal{F}_I^-\left(\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}\right)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{in } Y\,.$$

Der anschließende Grenzübergang $n \to \infty$ liefert schließlich für alle $\varphi \in C_c^\infty(3I)$, dass

$$j\bigg(\int_0^T (\mathcal{F}_I u)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\bigg) = -\int_0^T \mathcal{F}_I^-\left(\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t}\right)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{in } Y\,.$$

Insgesamt folgt, dass $\mathcal{F}_I u \in W_j^{1,p,q}(3I;X,Y)$ mit

$$\frac{\mathrm{d}_j}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_I u = \mathcal{F}_I^-\left(\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t}\right) \quad \text{in } L^q(3I;Y)\,.$$

Zusammen mit (i), (ii) folgt schließlich, dass $\mathcal{F}_I\colon W_j^{1,p,q}(I;X,Y) \to W_j^{1,p,q}(3I;X,Y)$ wohldefiniert, linear und stetig ist. □

Mit Hilfe von Fortsetzung mittels Spiegelung (*cf.* Theorem 4.22) können wir nun den Faltungsglättungsoperator (*cf.* Satz 2.15) zu einem Glättungsoperator für den Raum $W_j^{1,p,q}(I;X,Y)$ fortsetzen.

Theorem 4.24 (Faltungsglättungsoperator)
Sei $I = (0,T)$, $0 < T < \infty$, $p,q \in [1,\infty]$ und $j\colon X \to Y$ eine Einbettung. Wir definieren den Faltungsglättungsoperator $\mathcal{S}_I^h\colon L^p(I;X) \to C^\infty(\mathbb{R};X)$ *für alle $u \in L^p(I;X)$ durch*

$$\widehat{\mathcal{S}}_I^h u := \mathcal{S}_{3I}^h \mathcal{F}_I u|_I \in C^\infty(\mathbb{R};X)\,,$$

Dann gilt für alle $u \in W_j^{1,p,q}(I;X,Y)$:

(i) Es gilt $(\widehat{\mathcal{S}}_I^h u)_{h>0} \subset C_0^\infty(\mathbb{R};X)$ mit $\operatorname{supp}(\widehat{\mathcal{S}}_I^h u) \subseteq [-h-T, 2T+h]$ für alle $h > 0$ und

$$\frac{\mathrm{d}_j}{\mathrm{d}t}\widehat{\mathcal{S}}_I^h u = \mathcal{S}_{3I}^h\left(\frac{\mathrm{d}_j \mathcal{F}_X u}{\mathrm{d}t}\right) \qquad \text{in } L^q(I;Y) \qquad \text{für alle } h \in I\,.$$

(ii) $\|\widehat{\mathcal{S}}_I^h u\|_{W_j^{1,p,q}(I;X,Y)} \le c\,\|u\|_{W_j^{1,p,q}(I;X,Y)}$ für alle $h > 0$.

(iii) Falls $q,p < \infty$, dann gilt, dass

$$\widehat{\mathcal{S}}_I^h u|_I \to u \qquad \text{in } W_j^{1,p,q}(I;X,Y) \quad (h \to 0)\,.$$

Beweis. *Zu (i).* Dass $(\widehat{\mathcal{S}}_I^h u)_{h>0} \subset C_0^\infty(\mathbb{R};X)$ mit $\operatorname{supp}(\widehat{\mathcal{S}}_I^h u) \subseteq [-h-T, 2T+h]$ für alle $h > 0$ folgt aus Satz 2.15. Weiter gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$, dass

$$\left.\begin{aligned}
j\bigg(-\int_I (\widehat{\mathcal{S}}_I^h u)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\bigg) &= j\bigg(-\int_I \bigg(\int_{B_h^1(t)} (\mathcal{E}_{3I}(\mathcal{F}_I u))(s)\omega_h(t-s)\varphi'(t)\,\mathrm{d}s\bigg)\,\mathrm{d}t\bigg)\\
&= j\bigg(-\int_I \bigg(\int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s)\omega_h(t-s)\varphi'(t)\,\mathrm{d}s\bigg)\,\mathrm{d}t\bigg)\\
&= j\bigg(-\int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s)\bigg(\int_I \omega_h(t-s)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\bigg)\,\mathrm{d}s\bigg)\\
&= j\bigg(-\int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s)\bigg(\int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-s)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\bigg)\,\mathrm{d}s\bigg)\\
&= j\bigg(-\int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s)(\omega_h * \varphi')(s)\,\mathrm{d}s\bigg)\\
&= j\bigg(-\int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s)(\omega_h * \varphi)'(s)\,\mathrm{d}s\bigg)\\
&= \int_{3I}\left(\frac{\mathrm{d}_j\mathcal{F}_I u}{\mathrm{d}t}\right)(s)(\omega_h * \varphi)(s)\,\mathrm{d}s\\
&= \int_{3I}\left(\frac{\mathrm{d}_j\mathcal{F}_I u}{\mathrm{d}t}\right)(s)\bigg(\int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-s)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\bigg)\,\mathrm{d}s\\
&= \int_I\bigg(\int_{3I}\left(\frac{\mathrm{d}_j\mathcal{F}_I u}{\mathrm{d}t}\right)(s)\omega_h(t-s)\,\mathrm{d}s\bigg)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_I\bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{3I}\left(\frac{\mathrm{d}_j\mathcal{F}_I u}{\mathrm{d}t}\right)(s)\omega_h(t-s)\,\mathrm{d}s\bigg)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_I\bigg(\mathcal{S}_{3I}^h\left(\frac{\mathrm{d}_j\mathcal{F}_I u}{\mathrm{d}t}\right)(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}\right\}\quad \text{in } Y\,,$$

d.h. es gilt, dass

$$\frac{\mathrm{d}_j}{\mathrm{d}t}\widehat{\mathcal{S}}_I^h u = \mathcal{S}_{3I}^h\left(\frac{\mathrm{d}_j \mathcal{F}_X u}{\mathrm{d}t}\right) \quad \text{in } L^q(I;Y) \quad \text{für alle } h \in I\,.$$

Zu (ii). Wegen Satz 2.15(ii) und Satz 4.22(i) gilt, dass

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\mathcal{S}}_I^h u\|_{L^p(I;X)} &\le \|\mathcal{S}_{3I}^h(\mathcal{F}_I u)\|_{L^p(3I;X)} \\
&\le \|\mathcal{F}_I u\|_{L^p(3I;X)} \\
&\le c\,\|u\|_{L^p(I;X)}\,.
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt wegen (i), Satz 2.15(ii) und Satz 4.22(ii),(iii), dass

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\mathrm{d}_j}{\mathrm{d}t}\widehat{\mathcal{S}}_I^h u\right\|_{L^q(I;Y)} &\le \left\|\mathcal{S}_{3I}^h\left(\frac{\mathrm{d}_j}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_I u\right)\right\|_{L^q(3I;Y)} \\
&\le \left\|\mathcal{F}_I^-\left(\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t}\right)\right\|_{L^q(3I;Y)} \\
&\le c\left\|\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^q(I;Y)}\,.
\end{aligned}$$

Zu (iii). Falls $p,q \in [1,\infty)$, dann gilt wegen Satz 2.15(iii)), dass

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{S}}_I^h u|_I = \mathcal{S}_{3I}^h(\mathcal{F}_I u)|_I &\to \mathcal{F}_I u|_I = u && \text{in } L^p(I;X) \quad (h\to 0)\,, \\
\left.\frac{\mathrm{d}_j}{\mathrm{d}t}\widehat{\mathcal{S}}_I^h u\right|_I = \left.\mathcal{S}_{3I}^h\left(\mathcal{F}_I^-\left(\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t}\right)\right)\right|_I &\to \left.\mathcal{F}_I^-\left(\frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t}\right)\right|_I = \frac{\mathrm{d}_j u}{\mathrm{d}t} && \text{in } L^q(I;Y) \quad (h\to 0)\,,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt, dass $\widehat{\mathcal{S}}_I^h u|_I \to u$ in $W_j^{1,p,q}(I;X,Y)$ $(h \to 0)$. □

5 Gelfand-Dreier und verallgemeinerte partielle Integrationsformel

5.1 Gelfand-Dreier

Definition 5.1 (Gelfand-Dreier)
Falls V ein Banach-Raum ist, H ein Hilbert-Raum und $i\colon V \to H$ eine dichte Einbettung, d.h. $R(i)$ liegt dicht in H. Dann heißt das Tripel

$$(V, H, i)$$

Gelfand-Dreier *(oder Gelfand-Tripel, Evolutionstripel).*

Satz 5.2 (über Gelfand-Dreier)
Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Der adiungierte Operator $i^*\colon H^* \to V^*$, *definiert durch*

$$\langle i^*(h^*), v\rangle_V := \langle h^*, i(v)\rangle_H \quad \textit{für alle } h^* \in H^*\,,\ v \in V\,,$$

ist eine Einbettung.

(ii) Die kanonische Einbettung $e := i^* \circ R \circ i\colon V \to V^*$, *wobei $R\colon H \to H^*$ den Riesz-Isomorphismus bezeichnet, erfüllt*

$$\langle e(u), v\rangle_V = (i(u), i(v))_H \quad \textit{für alle } u, v \in V\,.$$

Insbesondere gilt:

$$V \overset{i}{\hookrightarrow} H \overset{R}{\cong} H^* \overset{i^*}{\hookrightarrow} V^*\,.$$

(iii) Falls V reflexiv ist, dann ist $e\colon V \to V^*$ eine dichte Einbettung.

Beweis. *Zu (i).*
1. Linearität und Stetigkeit: Da $i\colon V \to H$ linear und stetig ist, ist auch der adiungierte Operator $i^*\colon H^* \to V^*$ linear und stetig.
2. Injektivität: Sei $h^* \in \ker(i^*)$, d.h. für alle $v \in V$ gilt, dass

$$0 = \langle i^*(h^*), v\rangle_V = \langle h^*, iv\rangle_H\,.$$

Wegen der Dichtheit von $R(i)$ in H folgt weiter, dass für alle $h \in H$ gilt, dass $0 = \langle h^*, h\rangle_H$, d.h. $h^* = 0$ in H^*.
Zu (ii). Für alle $u, v \in V$ gilt, dass

$$\langle e(u), v\rangle_V = \langle R(i(u)), i(v)\rangle_H = (i(u), i(v))_H\,.$$

Zu (iii). (Übung). □

Beispiel 5.3

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet. Dann gilt:

(i) $(V, H, i) = (W_0^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega), \mathrm{id}_{W_0^{1,2}(\Omega)})$ *ist ein Gelfand-Dreier, denn*
- $i = \mathrm{id}_{W_0^{1,2}(\Omega)} : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *ist eine Einbettung;*
- $R(i) = W_0^{1,2}(\Omega)$ *liegt dicht in* $L^2(\Omega)$, *da* $C_c^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,2}(\Omega)$ *dicht in* $L^2(\Omega)$ *liegt.*

(ii) $(V, H, i) = (W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), \mathrm{id}_{W_0^{1,p}(\Omega)})$, $p \geq \frac{2d}{d+2}$, *ist ein Gelfand-Dreier, denn*
- $i = \mathrm{id}_{W_0^{1,2}(\Omega)} : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *ist eine Einbettung für* $p \geq \frac{2d}{d+2}$ ($\Leftrightarrow \frac{dp}{d-p} \geq 2$ *für* $p < d$)*;*
- $R(i) = W_0^{1,p}(\Omega)$ *liegt dicht in* $L^2(\Omega)$, *da* $C_c^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ *dicht in* $L^2(\Omega)$ *liegt.*

(iii) $(V, H, i) = (W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega), L^2(\Omega), \mathrm{id}_{W_0^{1,p}(\Omega)})$, $p \geq 1$, *ist ein Gelfand-Dreier, denn*
- $i = \mathrm{id}_{W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} : W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *ist eine Einbettung;*
- $R(i) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ *liegt dicht in* $L^2(\Omega)$, *da* $C_c^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ *dicht in* $L^2(\Omega)$ *liegt.*

Lemma 5.4

Sei (V, H, i) *ein Gelfand-Dreier und* $p \in (1, \infty)$.

Dann sind für $u \in L^p(I; V)$ *und* $w \in L^{p'}(I; V^*)$ *die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ *mit*

$$\frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} = w \quad \text{in } L^{p'}(I; V^*).$$

(ii) Für alle $v \in V$ *und* $\varphi \in C_c^\infty(I)$ *gilt, dass*

$$-\int_I (i(u(t)), i(v))_H \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \langle w(t), v \rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Bemerkung 5.5

In Lemma 5.4(ii) kann $v \in V$ *durch* $v \in D$, *wobei* D *dicht in* V *liegt, ersetzt werden.*

Beweis (von Lemma 5.4). Laut Definition 4.1 ist (i) äquivalent dazu, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$e\Big(-\int_I u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_I w(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{in } V^*.$$

Dies ist wieder äquivalent dazu, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ und $v \in V$ gilt, dass

$$\Big\langle e\Big(-\int_I u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big), v\Big\rangle_V = \Big\langle \int_I w(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, v\Big\rangle_V .$$

Da $\langle e(\cdot), v\rangle_V \in V^*$ und $\langle \cdot, v\rangle_V \in V^{**}$ für alle $v \in V$, ist Letzteres wegen Satz 1.21 äquivalent dazu, dass

$$-\int_I \langle e(u(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \langle w(t), v\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Wegen Satz 5.2(ii) ist Letzteres wiederum äquivalent zu (ii). □

5.2 Verallgemeinerte partielle Integrationsformel

Theorem 5.6 (Verallgemeinerte partielle Integrationsformel)
Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier, $p \in (1, \infty)$ und $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Für jedes $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ hat die Funktion $iu \in L^p(I; H)$, definiert durch

$$(iu)(t) := i(u(t)) \quad \text{in } H \quad \text{für f.a. } t \in I\,,$$

einen stetigen Repräsentanten $i_c u \in C^0(\overline{I}; H)$. Insbesondere ist die resultierende Abbildung $i_c\colon W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \to C^0(\overline{I}; H)$ eine Einbettung.

(ii) Für alle $u, v \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ und $t, t' \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$ gilt, dass

$$\int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}(s), v(s) \right\rangle_V \mathrm{d}s = \big[((i_c u)(s), (i_c v)(s))_H\big]_{s=t'}^{s=t} - \int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e v}{\mathrm{d}t}(s), u(s) \right\rangle_V \mathrm{d}s\,.$$

Korollar 5.7
Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 5.6.

Dann gilt für alle $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ und $t, t' \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$, dass

$$\int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}(s), u(s) \right\rangle_V \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\|(i_c u)(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(i_c u)(t')\|_H^2\,.$$

Beweis (von Korollar 5.7). Nutze Theorem 5.6 im Fall $v = u$. □

Beweis (von Theorem 5.6). *Zu (i).*

1. Wohldefiniertheit von i_c: Sei $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ beliebig, aber fest. Wegen Satz 4.24 (iii) existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{I}; V)$, sodass

$$u_n \to u \quad \text{in } W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \quad (n \to \infty)\,.$$

Dann gilt für alle $k, n \in \mathbb{N}$, dass $(\frac{1}{2}\|i(u_n(\cdot)) - i(u_k(\cdot))\|_H^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{I})$ (Übung) mit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|i(u_n(t)) - i(u_k(t))\|_H^2\right) &= \left(i\left(\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)\right) - i\left(\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}(t)\right), i(u_n(t)) - i(u_k(t))\right)_H \\
&= \left\langle e\left(\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)\right) - e\left(\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}(t)\right), u_n(t) - u_k(t)\right\rangle_V \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}_e u_n}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}_e u_k}{\mathrm{d}t}(t), u_n(t) - u_k(t)\right\rangle_V\,,
\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Gleichheitszeichen Satz 5.2(ii) und im dritten Gleichheitszeichen Korollar 4.9 ausgenutzt haben.

Mit dem klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt dann für alle $k,n \in \mathbb{N}$ und $t,t' \in \overline{I}$ mit $t' \le t$, dass

$$\int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e u_n}{\mathrm{d}t}(s) - \frac{\mathrm{d}_e u_k}{\mathrm{d}t}(s), u_n(s) - u_k(s) \right\rangle_V \mathrm{d}s = \left[\frac{1}{2} \| i(u_n(s)) - i(u_k(s)) \|_H^2 \right]_{s=t'}^{s=t} .$$

Mit der Hölder'schen Ungleichung (*cf.* Satz 2.3) folgt weiter für alle $k,n \in \mathbb{N}$ und $t,t' \in \overline{I}$ mit $t' \le t$, dass

$$\begin{aligned} \| i(u_n(t)) - i(u_k(t)) \|_H^2 &\le \| i(u_n(t')) - i(u_k(t')) \|_H^2 \\ &\quad + 2 \left\| \frac{\mathrm{d}_e u_n}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}_e u_k}{\mathrm{d}t} \right\|_{L^{p'}(I;V^*)} \| u_n - u_k \|_{L^p(I;V)} \\ &\le \| i(u_n(t')) - i(u_k(t')) \|_H^2 + 2 \, \| u_n - u_k \|_{W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)}^2 . \end{aligned}$$

Nutzen wir dann, dass $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für alle $a,b \ge 0$, und Bilden wir den Mittelwert $\frac{1}{T} \int_I \cdot \, \mathrm{d}t'$ in der resultierenden Ungleichung, dann erhalten wir für alle $k,n \in \mathbb{N}$ und $t \in \overline{I}$, dass

$$\begin{aligned} \| i(u_n(t)) - i(u_k(t)) \|_H &\le \frac{1}{T} \| iu_n - iu_k \|_{L^1(I;H)} + \sqrt{2} \, \| u_n - u_k \|_{W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)} \\ &\le c \, \| u_n - u_k \|_{W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)} , \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung ausgenutzt haben, dass $i \colon L^p(I;V) \to L^1(I;H)$ (wegen $p>1$ und der Stetigkeit von $i \colon V \to H$) stetig ist (*cf.* Korollar 2.2(iii), Korollar 2.4(i)). Bilden wir das Maximum bezüglich $t \in \overline{I}$ auf der linken Seite, dann folgt für alle $k,n \in \mathbb{N}$, dass

$$\| iu_n - iu_k \|_{C_b^0(\overline{I};H)} \le c \, \| u_n - u_k \|_{W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)} .$$

Da $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)$ eine Cauchy-Folge ist, muss auch $(iu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_b^0(\overline{I};H)$ eine Cauchy-Folge sein. Da $C^0(\overline{I};H) = C_b^0(\overline{I};H)$ (*cf.* Bemerkung 1.24) ein Banach-Raum ist (*cf.* Satz 1.26), existiert daher ein $i_c u \in C^0(\overline{I};H)$, sodass

$$iu_n \to i_c u \quad \text{in } C^0(\overline{I};H) \quad (n \to \infty) .$$

Da $C^0(\overline{I};H) \hookrightarrow L^p(I;H)$ und $i \colon L^p(I;V) \to L^p(I;H)$ stetig ist (*cf.* Korollar 2.2(iii)) gilt insbesondere, dass

$$\begin{aligned} iu_n &\to i_c u \qquad \text{in } L^p(I;H) \qquad (n \to \infty) , \\ iu_n &\to iu \qquad \text{in } L^p(I;H) \qquad (n \to \infty) . \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit des Grenzwertes zeigt dann, dass $i_c u \in C^0(\overline{I};H)$ ein stetiger Repräsentant von $u \in W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)$ ist. Da höchstens ein stetiger Repräsentant existieren kann, ist die Abbildung $i_c \colon W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*) \to C^0(\overline{I};H)$ wohldefiniert.

2. Injektivität von i_c: Folgt aus der Injektivität von $i \colon V \to H$.

3. Stetigkeit von i_c: Sei $u \in W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)$ beliebig, aber fest. Analog zum vorherigen Vorgehen (mit "$u_k = 0$") folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|iu_n\|_{C_b^0(\overline{I};H)} \le c\,\|u_n\|_{W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)}\,.$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt dann, dass

$$\|i_c u\|_{C_b^0(\overline{I};H)} \le c\,\|u\|_{W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)}\,,$$

d.h. die Abbildung $i_c\colon W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*) \to C^0(\overline{I};H)$ ist stetig.

Zu (ii). Seien $u, v \in W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)$ beliebig, aber fest. Wegen Satz 4.24(iii) existieren Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{I};V)$, sodass

$$\begin{aligned} u_n &\to u \qquad && \text{in } W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*) \qquad && (n\to\infty)\,,\\ v_n &\to v \qquad && \text{in } W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*) \qquad && (n\to\infty)\,. \end{aligned}$$

Aus (i) folgt dann unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} iu_n &\to i_c u \qquad && \text{in } C^0(\overline{I};H) \qquad && (n\to\infty)\,,\\ iv_n &\to i_c v \qquad && \text{in } C^0(\overline{I};H) \qquad && (n\to\infty)\,. \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t, t' \in \overline{I}$ gilt, dass

$$\int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e u_n}{\mathrm{d}t}(s), v_n(s)\right\rangle_V \mathrm{d}s = \big[((iu_n)(s),(iv_n)(s))\big]_{s=t'}^{s=t} - \int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e v_n}{\mathrm{d}t}(s), u_n(s)\right\rangle_V \mathrm{d}s\,.$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt dann für alle $t, t' \in \overline{I}$,

$$\int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}(s), v(s)\right\rangle_V \mathrm{d}s = \big[((i_c u)(s),(i_c v)(s))\big]_{s=t'}^{s=t} - \int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e v}{\mathrm{d}t}(s), u(s)\right\rangle_V \mathrm{d}s\,. \qquad \square$$

Theorem 5.6(i) sichert die Wohldefiniertheit der folgenden Anfangswertaufgabe:

Definition 5.8 (Evolutionsgleichung)
Sei (V,H,i) ein Gelfand-Dreier, $p \in (1,\infty)$ und $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$.

Weiter sei $(f,u_0)^\top \in L^{p'}(I;V^*)\times H$ ein Paar von Daten und $\mathcal{A}\colon W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*) \to L^{p'}(I;V^*)$ ein (möglicherweise nicht-linearer) Operator. Dann heißt die Anfangswertaufgabe, die nach einer Funktion $u \in W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)$ sucht, sodass

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}u &= f \qquad && \text{in } L^{p'}(I;V^*)\,,\\ (i_c u)(0) &= u_0 \qquad && \text{in } H\,, \end{aligned} \tag{EG}$$

Evolutionsgleichung. *Hierbei ist $i_c u \in C^0(\overline{I};H)$ der stetige Repräsentant aus Theorem 5.6(i).*

Das nächste Kapitel widmet sich Fragen der Lösbarkeit der Evolutionsgleichung (EG). Genauer untersuchen wir den Operator

$$\left(\frac{\mathrm{d}_e}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}, i_c(\cdot)(0)\right)^\top : W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*) \to L^{p'}(I;V^*) \times H\,,$$

auf Eigenschaften wie (Demi-)Stetigkeit, Surjektivität, Injektivität, Existenz einer Inversen (d.h. eines Lösungoperators zu (EG)) sowie deren Stetigkeitseigenschaften.

6 Instationäre Existenzsätze

6.1 Bochner-Nemyckii-Operatoren

In Anwendungen werden Operatoren $\mathcal{A}\colon L^p(I;X) \to L^q(I;Y)$ in der Regel durch die Vorschrift

$$(\mathcal{A}u)(t) \coloneqq A(t)(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t \in I\,,$$

definiert. Hierbei ist $A(t)\colon X \to Y$, $t \in I$, eine zeitabhängige Familie von stationären Operatoren, die meistens durch ein instationäres Problem motiviert ist. Da nicht alle Operatoren zwischen Bochner–Lebesgue-Räumen durch solche zeitabhängige Familie von stationären Operatoren gegeben ist, erhalten diese eine eigene Bezeichnung.

Definition 6.1 (Induzierte Operatoren)
Ein Operator $\mathcal{A}\colon \mathrm{Abb}(I;X) \to \mathrm{Abb}(I;Y)$ *heißt durch eine Familie von Operatoren* $A(t)\colon X \to Y$, $t \in I$, induziert, *falls für alle* $u \in \mathrm{Abb}(I;X)$ *gilt, dass*

$$(\mathcal{A}u)(t) = A(t)(u(t)) \quad \textit{in } Y \quad \textit{für f.a. } t \in I\,. \tag{6.2}$$

Definition 6.3 (Carathéodory- und Majoranten-Bedingung)
Seien $p, q \in [1,\infty)$. *Dann genügt eine Familie von Operatoren* $A(t)\colon X \to Y$, $t \in I$, *der*

(i) Carathéodory-Bedingung, *falls*

  (i.a) $A(t)\colon X \to Y$ *für f.a.* $t \in I$ *demi-stetig ist, d.h. für f.a.* $t \in I$ *folgt für eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *und ein Element* $x \in X$ *aus*

$$x_n \to x \quad \textit{in } X \quad (n \to \infty)\,,$$

  dass

$$A(t)x_n \rightharpoonup A(t)x \quad \textit{in } Y \quad (n \to \infty)\,.$$

  (i.b) $A(\cdot)x\colon I \to Y$ *für alle* $x \in X$ *Bochner-messbar ist.*

(ii) (p,q)-Majoranten-Bedingung, *falls eine Konstante* $\alpha > 0$ *und eine Funktion* $\beta \in L^q(I)$ *mit* $\beta \geq 0$ *f.ü. in* I *existieren, sodass für f.a.* $t \in I$ *und* $x \in X$ *gilt, dass*

$$\|A(t)x\|_Y \leq \alpha\, \|x\|_X^{\frac{p}{q}} + \beta(t)\,.$$

Bemerkung 6.4
Falls Y separabel ist, dann ist Definition 6.3(i.b) wegen dem Satz von Pettis (cf. Korollar 1.32) äquivalent dazu, dass $\langle y^*, A(\cdot)x\rangle_Y : I \to \mathbb{R}$ für alle $y^* \in Y^*$ und $x \in Y$ Lebesgue-messbar ist.

Das folgende Lemma zeigt, dass Bochner-Messbarkeit stabil unter der Caratheodory-Bedingung ist.

Lemma 6.5 (Bochner-Messbarkeit stabil unter Caratheodory-Bedingung)
Genügt die Operatorfamilie $A(t): X \to Y$, $t \in I$, der Caratheodory-Bedingung (cf. Definition 6.3(i)), dann ist der induzierte Operator $\mathcal{A}: L^0(I;X) \to L^0(I;Y)$ wohldefiniert.

Beweis. Sei $u \in L^0(I;X)$ beliebig, aber fest. Laut Definition 1.2 existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I;X)$, d.h. $s_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} x_i^n \chi_{B_i^n}(t)$, wobei $k_n \in \mathbb{N}$, $x_i^n \in X$, $i = 1,\dots,k_n$, und $B_i^n \subseteq I$, $i = 1,\dots,k_n$, Lebesgue-messbar mit $\lambda^1(B_i^n) < \infty$ und $B_i^n \cap B_j^n = \emptyset$ für $i \neq j$, sodass

$$s_n(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Da $A(t): X \to Y$ für f.a. $t \in I$ demi-stetig ist, folgt, dass

$$(\mathcal{A}s_n)(t) = A(t)(s_n(t)) \rightharpoonup A(t)(u(t)) = (\mathcal{A}u)(t) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Nach Voraussetzung gilt, dass $A(\cdot)s_i^n \in L^0(I;Y)$ für alle $i = 1,\dots,k_n$, $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$A(\cdot)s_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{B_i^n}(\cdot)A(\cdot)s_i^n + \chi_{I\setminus\bigcup_{i=1}^{k_n} B_i^n}(\cdot)A(\cdot)0 \in L^0(I;Y) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Schließlich liefert Korollar 1.37, dass $\mathcal{A}u \in L^0(I;Y)$. □

Das folgende Lemma zeigt, dass Bochner-Integrierbarkeit stabil unter der Majoranten-Bedingung ist.

Lemma 6.6 (Nemyckii-Operator)
Genügt die Operatorfamilie $A(t): X \to Y$, $t \in I$, der Caratheodory- (cf. Definition 6.3(i)) und der (p,q)-Majoranten-Bedingung (cf. Definition 6.3(ii)), dann ist der induzierte Operator $\mathcal{A}: L^p(I;X) \to L^q(I;Y)$ wohldefiniert, beschränkt und demi-stetig. Insbesondere gilt für alle $u \in L^p(I;X)$, dass

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^q(I;Y)} \leq \alpha\, \|u\|_{L^p(I;X)}^{\frac{p}{q}} + \|\beta\|_{L^q(I)}\,.$$

Falls zusätzlich $A(t): X \to Y$ für f.a. $t \in I$ stetig ist, dann ist der induzierte Operator $\mathcal{A}: L^p(I;X) \to L^q(I;Y)$ stetig.

Beweis. <u>*1. Wohldefiniertheit und Beschränktheit:*</u> Sei $u \in L^p(I;X)$ beliebig, aber fest. Aus Lemma 6.5 folgt, dass $\mathcal{A}u \in L^0(I;Y)$, sodass nur die q-Integrierbarkeit zu prüfen bleibt. Wegen

$$
\begin{aligned}
\bigg(\int_I \|A(s)u(s)\|_Y^q \,\mathrm{d}s\bigg)^{\frac{1}{q}} &\le \bigg(\int_I \Big(\alpha\,\|u(s)\|_X^{\frac{p}{q}} + \beta(s)\Big)^q \,\mathrm{d}s\bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \alpha\,\|u\|_{L^p(I;X)}^{\frac{p}{q}} + \|\beta\|_{L^q(I)}\,,
\end{aligned}
$$

wobei von der Minkowski-Ungleichung und von $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(I)$ (*cf.* Definition 2.1) Gebrauch gemacht wurde, ist $\mathcal{A}u \in L^q(I;Y)$, d.h. $\mathcal{A}\colon L^p(I;X) \to L^q(I;Y)$ wohldefiniert. Insbesondere folgt damit auch schon die Beschränktheit von $\mathcal{A}\colon L^p(I;X) \to L^q(I;Y)$.

<u>*2. Demi-Stetigkeit:*</u> Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;X)$, sodass $u_n \to u$ in $L^p(I;X)$ $(n \to \infty)$. Wegen Korollar 2.8 existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, sodass

$$
u_{n_k}(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (k \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I\,.
$$

Für alle $g \in L^{q'}(I;Y^*)$ gilt dann wegen der Demi-Stetigkeit von $A(t)\colon X \to Y$ für f.a. $t \in I$, dass

$$
\langle g(t), A(t)(u_{n_k}(t))\rangle_Y \to \langle g(t), A(t)(u(t))\rangle_Y \quad (k \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I\,.
$$

Für beliebiges Lebesgue-messbares $B \subseteq I$ gilt mit der Hölder-Ungleichung (*cf.* Satz 2.3) analog zur obigen Abschätzung, dass

$$
\begin{aligned}
\int_B |\langle g(t), A(t)(u_{n_k}(t))\rangle_Y|\,\mathrm{d}t &\le \|g\|_{L^{q'}(I,Y^*)}\|\chi_B \mathcal{A}u_{n_k}\|_{L^q(I;Y)} \\
&\le \|g\|_{L^{q'}(I,Y^*)}\Big(\alpha\,\|\chi_B u_{n_k}\|_{L^p(I;X)}^{\frac{p}{q}} + \|\chi_B\beta\|_{L^q(I)}\Big)\,,
\end{aligned}
$$

Da $\beta \in L^q(I)$ und $(\|u_{n_k}(\cdot)\|_X^p)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$ als konvergente Folge im klassischen Sinn gleichgradig integrierbar sind und die Lebesgue-messbare Menge $B \subseteq I$ beliebig gewählt war, ist auch

$$
(\langle g(\cdot), A(\cdot)u_{n_k}(\cdot)\rangle_Y)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)
$$

im klassischen Sinn gleichgradig-integrierbar. Zusammen mit fast überall punktweisen Konvergenz liefert nun der klassische Konvergenzsatz von Vitali (*cf.* [Els09, Kap. VI., §5, Satz 5.6, S. 262]) unter Beachtung der Darstellung der Dualität in Bochner-Lebesgue-Räumen gemäß Theorem 3.2, dass

$$
\langle R_Y g, \mathcal{A}u_{n_k} - \mathcal{A}u\rangle_{L^q(I;Y)} = \int_I \langle g(t), A(t)u_{n_k}(t) - A(s)u(t)\rangle_Y \,\mathrm{d}t \to 0 \quad (n \to \infty)\,.
$$

Da diese Argumentation für alle Teilfolgen gilt, ist $\mathcal{A}u \in L^q(I;Y)$ schwacher Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(\mathcal{A}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^q(I;Y)$. Das Teilfolgenkonvergenzprinzip (*cf.* [Zei93, Prop. 10.13(1)]) liefert nun die schwache Konvergenz der gesamten Folge, d.h.

$$
\mathcal{A}u_n \rightharpoonup \mathcal{A}u \quad \text{in } L^q(I;Y) \quad (k \to \infty)\,.
$$

<u>*3. Stetigkeit:*</u> (Übung). □

6.2 Instationäres Lemma von Lax–Milgram

In diesem Abschnitt beweisen ein instationäres Analogon des Lemmas von Lax–Milgram[1][2]. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir zunächst dessen Aussage.

Lemma 6.7 (von Lax–Milgram, 1954)
Sei V ein Hilbert-Raum und $A\colon V \to V^*$ ein linearer Operator, der den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Beschränktheit: *Es existiert eine Konstante $\alpha > 0$, sodass für alle $v \in V$ gilt, dass*
$$\|Av\| \leq \alpha \|v\|_V ;$$
(ii) Koerzivität: *Es existiert eine Konstante $\mu > 0$, sodass für alle $v \in V$ gilt, dass*
$$\langle Av, v\rangle_V \geq \mu \|v\|_V^2 .$$

Dann ist $A\colon V \to V^*$ ein Isomorphismus.

Die Aussage des instationären Analogons ist die folgende:

Theorem 6.8 (Instationäres Lemma von Lax–Milgram)
Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier, wobei V separabel und reflexiv ist, und $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Sei weiter $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, eine Familie von linearen Operatoren, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Carathéodory-Bedingung: *$A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, genügt der Carathéodory-Bedingung (cf. Definition 6.3(i));*

(ii) $(2, 2)$-Majoranten-Bedingung: *(cf. Definition 6.3(ii)) Es existiert eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Funktion $\beta \in L^2(I; \mathbb{R}_{\geq 0})$, sodass für f.a. $t \in I$ und alle $v \in V$ gilt, dass*
$$\|A(t)v\|_{V^*} \leq \alpha \|v\|_V + \beta(t) ,$$
d.h. insbesondere ist $A(t)\colon V \to V^*$ für f.a. $t \in I$ beschränkt/stetig;

(ii) (2-)Semi-Koerzivität-Bedingung: *Es existieren Konstanten $\mu > 0$, $\kappa \geq 0$ und eine Funktion $\lambda \in L^1(I)$, sodass für f.a. $t \in I$ und alle $v \in V$ gilt, dass*
$$\langle A(t)v, v\rangle_V \geq \mu \|v\|_V^2 - \kappa \|iv\|_H^2 + \lambda(t) .$$

[1] Peter David Lax, geb. 1926 in Ungarn. Lax promovierte bei Friedrichs und ist Professor am Courant Institute of Mathematical Sciences in New York. Er arbeitet zur Analysis und Numerischen Analysis partieller Differentialgleichungen und befasst sich insbesondere mit den Grundgleichungen der Stromungsmechanik. Von 1979 bis 1980 war Lax Präsident der American Mathematical Society.

[2] Arthur Norton Milgram, geb. 1912, gest. 1961 in Minnesota. Milgram promovierte 1937 in Pennsylvania und war Professor in Notre Dame, Princeton, Syracuse und Minnesota. Er arbeitete an Fragen der Topologie, Algebra und Funktionalanalysis. Bekannt ist Milgram auch für die Herausgabe eines Klassikers zur Galois-Theorie auf der Grundlage von Vorlesungen von Artin.

Dann existiert zu jedem Paar von Daten $(f,u_0)^\top \in L^2(I;V^*)\times H$ *ein* $u \in W_e^{1,2,2}(I;V,V^*)$*, sodass*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}u &= f \qquad \text{in } L^2(I;V^*)\,,\\ (i_c u)(0) &= u_0 \qquad \text{in } H\,. \end{aligned}$$

Falls $\lambda = 0$*, dann ist die Lösung eindeutig bestimmt und hängt stetig von den Daten ab. Mit anderen Worten: falls* $\lambda = 0$*, dann ist der lineare Operator*

$$\left(\frac{\mathrm{d}_e}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}, i_c(\cdot)(0)\right)^\top : W_e^{1,2,2}(I;V,V^*) \to L^2(I;V^*)\times H\,,$$

ein Isomorphismus.

Beweis. *1. Existenz:* (mit Hilfe einer Galerkin-Approximation)

1.0 Reduktion auf triviale rechte Seite: Wir können ohne Beschränktheit der Allgemeinheit annehmen, dass $f = 0$ in $L^2(I;V^*)$. Sonst betrachten wir die verschobene Familie von Operatoren $\widetilde{A}(t) \coloneqq A(t) - f(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, die dieselben Eigenschaften hat (Übung).

1.1 Konstruktion der Galerkin-Approximation: Wegen der Separabilität von V, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $\{v_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. Da $i\colon V\to H$ eine dichte Einbettung ist, ist $\{iv_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls dicht in H. Wir können ohne Beschränktheit der Allgemeinheit annehmen, dass $\{iv_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in H auch orthonormal ist. Sonst gehen wir einfach mit Hilfe des Gram–Schmidt-Orthonomalisierungsverfahrens zu einer Orthonormalbasis über. Als Nächstes definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die endlich-dimensionalen Räume

$$V_n \coloneqq \{v_1,\dots,n\} \quad \text{und} \quad H_n \coloneqq \{iv_1,\dots,iv_n\}\,.$$

Dann gilt:

- $V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq V$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- $\dim(V_n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ liegt dicht in V;
- $(V_n, H_n, i_n \coloneqq i|_{V_n})$ ist ein Gelfand-Dreier mit kanonischer Einbettung (*cf.* Satz 5.2(ii)) $e_n \coloneqq i_n^* \circ R_{H_n} \circ i_n\colon V_n \to (V_n)^*$.

Dann suchen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ eine *Galerkin-Lösung (GL)* $u_n \in W_{e_n}^{1,2,2}(I;V_n,(V_n)^*)$ zum folgenden *Galerkin-System (GS)*:

$$\begin{aligned} \int_I \left\langle \frac{\mathrm{d}_{e_n} u_n}{\mathrm{d}t}(t), \varphi_n(t)\right\rangle_{V_n} \mathrm{d}t + \int_I \langle A(t)(u_n(t)), \varphi_n(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t = 0 \qquad &\text{für alle } \varphi_n \in L^2(I;V_n)\,,\\ (i_c u_n)(0) = u_0^n \qquad &\text{in } H_n\,, \end{aligned} \tag{GS}$$

wobei $i_c^n\colon W_{e_n}^{1,2,2}(I;V_n,(V_n)^*) \to C^0(\overline{I};H_n)$ die Einbettung aus Theorem 5.6(i) ist und die Approximation des Anfangswerts $u_0 \in H$ durch eine Fourier–Reihe realisiert wird, d.h.

$$u_0^n \coloneqq \sum_{k=1}^n (u_0, iv_k)_H iv_k \in H_n\,.$$

Insbesondere gilt dann (*cf.* [Zei90])

$$u_0^n \to u_0 \quad \text{in } H \quad (n\to\infty) \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_0^n\|_H \le \|u_0\|_H\,.$$

1.2 Existenz von Galerkin-Lösungen:

1.2.1 Äquivalentes System von geöhnlichen Differentialgleichungen: Eine Funktion $u_n \in W^{1,2,2}_{e_n}(I; V_n, (V_n)^*)$ ist eine Galerkin-Lösung (GL)) (d.h. löst das Galerkin-System (GS)) genau dann, wenn (Übung) $u_n \in AC(\overline{I}; V_n)$, von der Form

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n v_k \in AC(\overline{I}; V_n)\,,$$

wobei $\alpha_k^n \in AC(\overline{I})$, $k = 1, \dots, n$, und $\boldsymbol{\alpha}^n := (\alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n)^\top \in AC(\overline{I}; \mathbb{R}^n)$ das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}^n}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{f}^n(\cdot, \boldsymbol{\alpha}^n) \qquad \text{f.ü. in } I\,, \\ \boldsymbol{\alpha}^n(0) &= ((u_0, iv_i)_H)_{i=1,\dots,n}\,, \end{aligned} \tag{GS-ODE}$$

wobei $\boldsymbol{f}^n \colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, für alle $(t, \boldsymbol{\alpha})^\top \in I \times \mathbb{R}^n$ durch

$$\boldsymbol{f}^n(t, \boldsymbol{\alpha}) := \bigg(\bigg\langle -A(t)\bigg(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\bigg), v_i\bigg\rangle_V\bigg)_{i=1,\dots,n}$$

definiert ist.

1.2.2 Kurzzeitexistenz von Lösungen: Wegen der Carathéodory-Bedingung (*cf.* Definition 6.3(i)) ist die Funktion $\boldsymbol{f}^n \colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Caratheodory-Funktion, d.h.

- $\boldsymbol{f}^n(\cdot, \boldsymbol{\alpha}) \colon I \to \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar für alle $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$;
- $\boldsymbol{f}^n(t, \cdot) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist stetig für f.a. $t \in I$;

und erfüllt wegen der (p, p')-Majoranten-Bedingung eine lokale Majoranten-Bedingung, d.h.

- Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, existiert eine Funktion $h_n \in L^1(I)$, sodass

$$\sup_{\boldsymbol{\alpha} \in K} |\boldsymbol{f}^n(t, \boldsymbol{\alpha})| \le h_n(t) \qquad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Der lokale Existenzsatz von Carathéodory (*cf.* [Hal80]) liefert einen maximalen Existenzzeitpunkt $T_n \in (0, T]$ und eine maximale Lösung $\boldsymbol{\alpha}^n := (\alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n)^\top \colon [0, T_n) \to \mathbb{R}^n$, die lokal absolut stetig ist, sodass des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen (GS-ODE), d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}^n}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{f}^n(\cdot, \boldsymbol{\alpha}^n) \qquad \text{a.e. in } (0, T_n)\,, \\ \boldsymbol{\alpha}^n(0) &= ((u_0, iv_k)_H)_{k=1,\dots,n}\,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

1.2.2 Langzeitexistenz von Lösungen: Angenommen $T_n < T$. Sei $t \in [0, T_n)$ beliebig, aber fest. Dann gilt für die Funktion

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n\, v_k \in AC([0, t]; V_n)\,,$$

dass $u_n \in W^{1,2,2}_{e_n}(0,t;V_n,(V_n)^*)$ und für alle $\varphi_n \in L^2(0,t,V_n)$ gilt, dass

$$\int_0^t \left\langle \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t), \varphi_n(t) \right\rangle_{V_n} \mathrm{d}t + \int_0^t \langle A(t)(u_n(t)), \varphi_n(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{für alle } \varphi_n \in L^2((0,t);V_n)\,,$$
$$(i_c u_n)(0) = u_0^n \text{ in } H_n\,. \qquad \text{(GS-lokal)}$$

Wählen wir im lokalen Galekin-System (GS-lokal) als Testfunktion $\varphi_n = u_n \chi_{[0,s]} \in L^p((0,t);V_n)$, wobei $s \in [0,t]$ beliebig ist, so erhalten wir mit der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (*cf.* Theorem 5.6(ii)) und der gleichmäßigen (2-)Semi-Koerzivität von $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^s \left\langle \frac{\mathrm{d}_{e_n} u_n}{\mathrm{d}t}(\tau), u_n(\tau) \right\rangle_{V_n} \mathrm{d}\tau + \int_0^s \langle A(\tau)(u_n(\tau)), u_n(\tau)\rangle_V \,\mathrm{d}\tau \\ &\geq \frac{1}{2}\|(i_c^n u_n)(s)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(i_c^n u_n)(0)\|_H^2 \\ &\quad + \mu \int_0^s \|u_n(\tau)\|_V^2 \,\mathrm{d}\tau - \kappa \int_0^s \|i(u_n(\tau))\|_H^2 \,\mathrm{d}\tau - \int_0^s \lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

Zusammen mit $(i_c^n u_n)(s) = (i_c u_n)(s)$, $(i_c^n u_n)(0) = u_0^n$ in H und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_0^n\|_H \leq \|u_0\|_H$ folgt daraus, da $s \in [0,t]$ beliebig war, für alle $s \in [0,t]$, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|(i_c u_n)(s)\|_H^2 + \mu \int_0^s \|u_n(\tau)\|_V^2 \,\mathrm{d}\tau &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \|\lambda\|_{L^1(I)} + \kappa \int_0^s \|(i_c u_n)(\tau)\|_H^2 \,\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \|\lambda\|_{L^1(I)} \\ &\quad + \int_0^s 2\kappa \left(\frac{1}{2}\|(i_c u_n)(\tau)\|_H^2 + \mu \int_0^\tau \|u_n(\eta)\|_V^2 \,\mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

Die Grönwall'sche Ungleichung (*cf.* [Emm04, Lemma 7.3.1, S. 180]) angewendet auf die Funktionen $f_n \in C^0([0,t])$, $n \in \mathbb{N}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_n(s) \coloneqq \frac{1}{2}\|(i_c u_n)(s)\|_H^2 + \mu \int_0^s \|u_n(\tau)\|_V^2 \,\mathrm{d}\tau \qquad \text{für alle } s \in [0,t]\,,$$

liefert dann für alle $s \in [0,t]$, dass

$$\frac{1}{2}\|(i_c u_n)(s)\|_H^2 + \mu \int_0^s \|u_n(\tau)\|_V^2 \,\mathrm{d}\tau \leq \left(\frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \|\lambda\|_{L^1(I)} \right) \exp(2\kappa T)\,.$$

Mit anderen Worten gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} \|i_c u_n\|_{C_b^0([0,t];H)} &\leq \sqrt{(\|u_0\|_H^2 + 2\,\|\lambda\|_{L^1(I)})\exp(2\kappa T)}\,, \\ \|u_n\|_{L^2((0,t);V)} &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2\mu}\,\|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\mu}\,\|\lambda\|_{L^1(I)} \right) \exp(2\kappa T)}\,. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus der ersten Ungleichung, dass

$$\limsup_{t\to T_n} |\boldsymbol{\alpha}_n(t)| \leq c_n \limsup_{t\to T_n} \|j_c u_n(t)\|_H < \infty\,.$$

Der Satz über das Randverhalten maximaler Lösungen liefert dann, dass $T_n = T$.

1.3 A priori Abschätzungen: Wählen wir im (globalen) Galerkin-System (GS) als Testfunktion $\varphi_n = u_n\chi_{[0,t]} \in L^p(I;V_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $t \in \overline{I}$ beliebig ist, so erhalten wir mit demselben Vorgehen wir im vorherigen Schritt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \|i_c u_n\|_{C_b^0(I;H)} &\leq \sqrt{(\|u_0\|_H^2 + 2\,\|\lambda\|_{L^1(I)})\exp(2\kappa T)}\,, \\ \|u_n\|_{L^2(I;V)} &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2\mu}\,\|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\mu}\,\|\lambda\|_{L^1(I)}\right)\exp(2\kappa T)}\,. \end{aligned}$$

1.4 Schwache Konvergenz der Galerkin-Lösungen: Da $L^2(I;V)$ reflexiv ist (*cf.* Theorem 3.3), existiert eine Teilfolge, die wir der Einfachheit nicht umbenennen, und eine Funktion $u \in L^2(I;V)$, dass

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(I;V) \quad (n \to \infty)\,. \tag{6.10}$$

Da $\mathcal{A}\colon L^2(I;V) \to L^2(I;V^*)$ linear und stetig ist (*cf.* Lemma 6.6), d.h. insbesondere schwach stetig, folgt aus (6.10) weiter, dass

$$\mathcal{A}u_n \rightharpoonup \mathcal{A}u \quad \text{in } L^2(I;V^*) \quad (n \to \infty)\,. \tag{6.11}$$

1.5 Grenzübergang im Galerkin-System: Sei $v \in V_k$, wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist, und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T) = 0$. Wegen $V_n \subseteq V_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $v \in V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Insbesondere gilt, dass $v\varphi \in L^2(I;V_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Wählen wir im Galerkin-System (GS) als Testfunktion $\varphi_n \coloneqq v\varphi \in L^2(I;V_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$, so erhalten wir nach anschließender (verallgemeinerter) partieller Integration (*cf.* Theorem 5.6(ii)), dass

$$\int_I ((iu_n)(t), iv)_H\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (u_0^n, iv)_H\varphi(0) + \int_I \langle A(t)(u_n(t)), v\rangle_V\, \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir unter Berücksichtigung von (6.10) und (6.11), dass

$$\int_I ((iu)(t), iv)_H\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (u_0, iv)_H\varphi(0) + \int_I \langle A(t)(u(t)), v\rangle_V\, \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Hier haben wir insbesondere ausgenutzt, dass (6.10) wegen Satz 2.2(ii) impliziert, dass $iu_n \rightharpoonup iu$ in $L^p(I;H)$ $(n \to \infty)$. Da $v \in V_k$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig waren und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in V liegt, folgt für alle $v \in V$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T) = 0$, dass

$$\int_I ((iu)(t), iv)_H\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (u_0, iv)_H\varphi(0) + \int_I \langle A(t)(u(t)), v\rangle_V\, \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Da letztere Identität insbesondere für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, folgt zusammen mit Lemma 5.4, dass

$$u \in W_e^{1,2,2}(I;V,V^*) \quad \text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{A}u \quad \text{in } L^2(I;V^*)\,.$$

Mit der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (*cf.* Theorem 5.6(ii)) erhalten wir außerdem für alle $v \in V$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(0) = 1$, dass

$$((i_c u)(0) - u_0, iv)_H = 0\,,$$

wobei $i_c u \in C^0(\overline{I}; H)$ der stetige Repräsentant aus Theorem 5.6(i) ist. Da $R(i)$ dicht in H liegt, folgern wir daraus, dass $(i_c u)(0) = u_0$ in H. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $u \in W_e^{1,2,2}(I; V, V^*)$ mit einem stetigen Repräsentanten $i_c u \in C^0(\overline{I}; H)$ und

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}u &= 0 \qquad &&\text{in } L^2(I; V^*)\,,\\ (i_c u)(0) &= u_0 &&\text{in } H\,. \end{aligned}$$

<u>*2. Stetige Abhängigkeit:*</u> Seien $f_i \in L^2(I; V^*)$, $i=1,2$, und $u_0^i \in H$, $i=1,2$. Seien weiter $u_i \in W_e^{1,2,2}(I; V; V^*)$, $i = 1, 2$, sodass

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u_i}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}u_i &= f_i \qquad &&\text{in } L^2(I; V^*)\,,\\ (i_c u_i)(0) &= u_0^i &&\text{in } H\,, \end{aligned}\right\} \qquad \text{für } i = 1, 2\,.$$

Definieren wir $w \coloneqq u_1 - u_2 \in W_e^{1,2,2}(I; V; V^*)$, $g \coloneqq f_1 - f_2 \in L^2(I; V^*)$ und $w_0 \coloneqq u_0^1 - u_0^2 \in H$, dann folgt wegen der Linearität des Operators $\mathcal{A}\colon L^2(I; V) \to L^2(I; V^*)$, dass

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e w}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}w &= g \qquad &&\text{in } L^2(I; V^*)\,,\\ (i_c w)(0) &= w_0 &&\text{in } H\,. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt dann mit Hilfe der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (*cf.* Theorem 5.6(ii)) und der (2-)Semi-Koerzivität von $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, für alle $t \in \overline{I}$, dass

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle g(s), w(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s &= \int_0^t \left\langle \frac{\mathrm{d}_e w}{\mathrm{d}t}(s), w(s)\right\rangle_V \mathrm{d}s + \int_0^t \langle A(s)(w(s)), w(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s\\ &\geq \frac{1}{2}\|(i_c w)(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|w_0\|_H^2\\ &\quad + \mu \int_0^t \|w(s)\|_V^2 \,\mathrm{d}s - \kappa \int_0^t \|(iw)(s)\|_H^2 \,\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

Mit der ε-Young Ungleichung (d.h. $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$ für alle $a, b \geq 0$ und $\varepsilon > 0$, *cf.* [Emm04, Satz A.1.1, S. 269]) folgt weiter im Fall $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$, dass

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle g(s), w(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s &\leq \int_0^t \|g(s)\|_{V^*}\|w(s)\|_V \,\mathrm{d}s\\ &\leq \frac{2}{\mu}\int_0^t \|g(s)\|_{V^*}^2 \,\mathrm{d}s + \frac{\mu}{2}\int_0^t \|w(s)\|_V^2 \,\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

Zusammen folgt dann für alle $t \in \overline{I}$, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|(i_c w)(t)\|_H^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^t \|w(s)\|_V^2 \,\mathrm{d}s &\leq \frac{1}{2}\|w_0\|_H^2 + \frac{2}{\mu}\,\|g\|_{L^2(I;V^*)}^2 + \kappa \int_0^t \|(iw)(s)\|_H^2 \,\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{1}{2}\|w_0\|_H^2 + \frac{2}{\mu}\,\|g\|_{L^2(I;V^*)}^2 \\ &\quad + 2\kappa \int_0^t \left(\frac{1}{2}\|(iw)(s)\|_H^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^s \|w(\tau)\|_V^2 \,\mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Die Grönwall'sche Ungleichung (*cf.* [Emm04, Lemma 7.3.1, S. 180]) liefert dann, dass

$$\begin{aligned}\|i_c w\|_{C_b^0(I;H)} &\leq \sqrt{(\|w_0\|_H^2 + 2\,\|g\|_{L^2(I;V^*)}^2)\exp(2\kappa T)}\,, \\ \|w\|_{L^2(I;V)} &\leq \sqrt{\left(\frac{2}{\mu}\,\|w_0\|_H^2 + \frac{2}{\mu}\,\|g\|_{L^2(I;V^*)}^2\right)\exp(2\kappa T)}\,.\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\begin{aligned}\|i_c u_1 - i_c u_2\|_{C_b^0(I;H)} &\leq \sqrt{(\|u_0^1 - u_0^2\|_H^2 + 2\,\|f_1 - f_2\|_{L^2(I;V^*)}^2)\exp(2\kappa T)}\,, \\ \|u_1 - u_2\|_{L^2(I;V)} &\leq \sqrt{\left(\frac{2}{\mu}\,\|u_0^1 - u_0^2\|_H^2 + \frac{2}{\mu}\,\|f_1 - f_2\|_{L^2(I;V^*)}^2\right)\exp(2\kappa T)}\,.\end{aligned}$$

Da außerdem $\mathcal{A}\colon L^2(I;V) \to L^2(I;V^*)$ linear und stetig ist (*cf.* Lemma 6.6), folgt

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}_e u_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}_e u_2}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^2(I;V^*)} &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(I;V^*)}^2 + \|\mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2\|_{L^2(I,V^*)} \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(I;V^*)}^2 + \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(L^2(I;V);L^2(I;V^*))}\|u_1 - u_2\|_{L^2(I;V)}\,,\end{aligned}$$

d.h. die Lösung hängt stetig von den Daten. Dies impliziert auch unmittelbar die Eindeutigkeit der Lösung im Fall $\lambda = 0$. □

Als Anwendung des instationären Lemmas von Lax–Milgram (*cf.* Theorem 6.8) erhalten wir die schwache Lösbarkeit der instationären Wärmeleitungsgleichung, welche nach einer zeitlichen Wärmeentwicklung $u\colon [0,T)\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ sucht, sodass

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f && \text{in } (0,T)\times\Omega\,,\\ u &= 0 && \text{auf } (0,T)\times\partial\Omega\,,\\ u(0,\cdot) &= u_0 && \text{in } \Omega\,. \end{aligned}$$

Korollar 6.12 (Wärmeleitungsgleichung)
Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $I=(0,T)$, $0<T<\infty$.

Dann existiert zu einem beliebigen Paar von Daten $(f,u_0)\in L^2(I;(W_0^{1,2}(\Omega))^*)\times L^2(\Omega)$ ein eindeutiges $u\in W_e^{1,2,2}(I;W_0^{1,2}(\Omega),(W_0^{1,2}(\Omega))^*)$ mit einem stetigen Repräsentanten $u_c\in C^0(\overline{I};L^2(\Omega))$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}u &= f && \text{in } L^2(I;(W_0^{1,2}(\Omega))^*)\,,\\ u_c(0) &= u_0 && \text{in } L^2(\Omega)\,, \end{aligned} \tag{6.13}$$

wobei $\mathcal{A}\colon L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))\to L^2(I;(W_0^{1,2}(\Omega))^*)$, für alle $v\in L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))$ definiert durch

$$(\mathcal{A}v)(t) \coloneqq A(v(t)) \qquad \text{in } (W_0^{1,2}(\Omega))^* \qquad \text{für f.a. } t\in I\,,$$

den instationären schwachen Laplace-Operator bezeichnet, wobei $A\colon W_0^{1,2}(\Omega)\to(W_0^{1,2}(\Omega))^*$, für alle $v,w\in W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle Av,w\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \coloneqq \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x$$

den (stationären) schwachen Laplace-Operator bezeichnet.

Bevor wir Korollar 6.12 beweisen, wollen wir noch äquivalente Formulierungen zur Evolutionsgleichung herleiten.

Bemerkung 6.14 (Äquivalente schwache Formulierungen zu (6.13))
Die folgenden schwachen Formulierungen sind äquivalent zur Evolutionsgleichung (6.13):

(i) Punktweise Formulierung: *Die Evolutionsgleichung (6.13) ist äquivalent dazu, dass*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}(t) + A(u(t)) &= f(t) && \text{in } (W_0^{1,2}(\Omega))^* \quad \text{für f.a. } t\in I\,,\\ u_c(0) &= u_0 && \text{in } L^2(\Omega)\,, \end{aligned}$$

(ii) Schwache Formulierung: *Die Evolutionsgleichung* (6.13) *ist äquivalent dazu, dass für alle* $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *und* $\varphi \in C^\infty(\bar{I})$ *mit* $\varphi(T) = 0$ *gilt, dass*

$$-\int_I \Big(\int_\Omega u(t) v \,\mathrm{d}x \Big) \varphi'(t) \,\mathrm{d}t + \int_I \Big(\int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \Big) \varphi(t) \,\mathrm{d}t = \int_\Omega u_0 v \,\mathrm{d}x \varphi(0) + \int_I \langle f(t), v \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \varphi(t) \,\mathrm{d}t \,.$$

Beweis (von Korollar 6.12). Laut Beispiel 5.3 ist $(W_0^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega), \mathrm{id}_{W_0^{1,2}(\Omega)})$ ein Gelfand-Dreier. Insbesondere ist $W_0^{1,2}(\Omega)$ sowohl separabel als auch reflexiv. Es ist also nur noch zu zeigen, dass die zeitlich konstante Familie von linearen Operatoren $A\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ die Carathéodory-Bedingung, die $(2,2)$-Majoranten-Bedingung, und die 2-Semi-Koerzivitätsbedingung erfüllt:

1. Carathéodory-Bedingung: Da wir eine zeitlich Konstante Familie von linearen Operatoren betrachten, reicht es die Demi-Stetigkeit zu überprüfen. Diese ist gesichert, da $A\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ sogar stetig (oder auch schwach stetig) ist.

2. $(2,2)$*-Majoranten-Bedingung:* Für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \|Av\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^*} &= \sup_{\substack{w \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \|w\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le 1}} \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x \\ &\le \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^d} \\ &\le \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \,. \end{aligned}$$

3. 2-Semi-Koerzivitäts-Bedingung: Für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \langle Av, v \rangle_V &= \|\nabla v\|^2_{(L^2(\Omega))^d} \\ &\ge c_{\mathrm{P}}^{-2} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \,, \end{aligned}$$

wobei $c_{\mathrm{P}} > 0$ die Poincaré-Konstante bezeichnet.
Das instationäre Lemma von Lax–Milgram (*cf.* Theorem 6.8) liefert daher die Behauptung. □

6.3 Instationärer Satz von Browder–Minty

In diesem Abschnitt wollen wir ein instationäres Analogon des Satzes von Browder[3]–Minty[4] beweisen. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir zunächst dessen Aussage.

Satz 6.15 (von Browder–Minty)
Sei V ein reflexiver, separabler Banach-Raum und $A\colon V \to V^*$ ein Operator, der den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Monotonie: *Für alle $v, w \in V$ gilt, dass*

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle_V \geq 0\,.$$

(ii) Demi-Stetigkeit: *Für eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ und ein Element $v \in V$ folgt aus*

$$v_n \to v \quad \text{in } V \quad (n \to \infty)\,,$$

dass

$$Av_n \rightharpoonup Av \quad \text{in } V^* \quad (n \to \infty)\,;$$

(iii) Koerzivität: *Es gilt, dass*

$$\frac{\langle Av, v\rangle_V}{\|v\|_V} \to \infty \quad (\|v\|_V \to \infty)\,.$$

Dann ist $A\colon V \to V^*$ surjektiv.

Falls $A\colon V \to V^*$ zusätzlich strikt monoton *ist, d.h. für alle $v, w \in V$ mit $v \neq w$ gilt, dass*

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle_V > 0\,,$$

dann ist $A\colon V \to V^*$ eine Bijektion mit demi-stetiger Inversen.

Bemerkung 6.16
Die Theorie monotoner Operatoren geht insbesondere auf Wainberg (1959), Zarantonello (1960), Browder (1963), Minty (1962) und Brezis (1968) zurück.

Die Aussage des instationären Analogons ist die folgende.

[3] Felix E. Browder, geb. 1927 in Moskau. Browder ist Professor an der Rutgers University und war vorher am Massachusetts Institute of Technology und an Universitaten in Yale und Chicago tatig. Er ist einer der Begriinder der Nichtlinearen Funktionalanalysis und wandte diese auf nichtlineare Differentialgleichungen an. Von 1999 bis 2000 war Browder Prasident der American Mathematical Society.

[4] George James Minty, geb. 1930, gest. 1986. Minty promovierte 1959 bei Rothe an der Universitat in Michigan. Die Beschaftigung mit elektrischen Schaltkreisen fiihrte ihn sowohl zur Diskreten Mathematik als auch zur Funktionalanalysis. Minty war Professor an der Indiana University.

Theorem 6.17 (Instationärer Satz von Brownder–Minty)
Sei (V,H,i) ein Gelfand-Dreier, wobei V separabel und reflexiv ist, $p \in (1,\infty)$ und $I \coloneqq (0,T)$, $0 < T < \infty$.

Sei weiter $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, eine Familie von monotonen Operatoren, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Carathéodory-Bedingung: *$A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, genügt der Carathéodory-Bedingung (cf. Definition 6.3(i));*

(ii) (p,p')-Majoranten-Bedingung: *Es existiert eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Funktion $\beta \in L^{p'}(I;\mathbb{R}_{\geq 0})$, sodass*

$$\|A(t)v\|_{V^*} \leq \alpha\,\|v\|_V^{p-1} + \beta(t) \qquad \text{für f.a. } t \in I \text{ und alle } v \in V\,;$$

(iii) p-Semi-Koerzivität-Bedingung: *Es existieren Konstanten $\mu > 0$, $\kappa \geq 0$ und eine Funktion $\lambda \in L^1(I)$, sodass*

$$\langle A(t)v, v\rangle_V \geq \mu\,\|v\|_V^p - \kappa\,\|iv\|_H^2 + \lambda(t) \qquad \text{für f.a. } t \in I \text{ und alle } v \in V\,.$$

Dann existiert zu jedem Paar von Daten $(f,u_0)^\top \in L^{p'}(I;V^*)\times H$ ein $u \in W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}u &= f && \text{in } L^{p'}(I;V^*)\,,\\ (i_c u)(0) &= u_0 && \text{in } H\,. \end{aligned}$$

Falls $\lambda = 0$, dann ist die Lösung eindeutig und hängt demi-stetig von den Daten ab.

Mit anderen Worten: Falls $\lambda = 0$, dann ist der Operator

$$\left(\frac{\mathrm{d}_e}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}, (i_c\cdot)(0)\right)^\top : W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*) \to L^{p'}(I;V^*) \times H\,,$$

eine Bijektion mit demi-stetiger Inversen.

Beweis. *1. Existenz:* (mit Hilfe einer Galerkin-Approximation)

1.0 Reduktion auf triviale rechte Seite: Wir können ohne Beschränktheit der Allgemeinheit annehmen, dass $f = 0$ in $L^{p'}(I;V^*)$. Sonst betrachten wir die verschobene Familie von Operatoren $\widetilde{A}(t) \coloneqq A(t) - f(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, die dieselben Eigenschaften hat (Übung).

1.1 Konstruktion der Galerkin-Approximation: Analog zum instationären Lemma von Lax–Milgram (*cf.* Theorem 6.8).

1.2 Existenz von Galerkin-Lösungen: Analog zum instationären Lemma von Lax–Milgram (*cf.* Theorem 6.8).

1.3 A priori Abschätzungen: Wählen wir im Galerkin-System (GS) als Testfunktion $\varphi_n = u_n\chi_{[0,t]} \in L^p(I; V_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $t \in \overline{I}$ beliebig ist, so erhalten wir mit der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (*cf.* Theorem 5.6) und der gleichmäßigen p-Semi-Koerzivität von $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \overline{I}$, dass

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^t \left\langle \frac{\mathrm{d}_{e_n} u_n}{\mathrm{d}t}(s), u_n(s) \right\rangle_{V_n} \mathrm{d}s + \int_0^t \langle A(s)(u_n(s)), u_n(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{1}{2}\|(i_c^n u_n)(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(i_c^n u_n)(0)\|_H^2 \\
&\quad + \mu \int_0^t \|u_n(s)\|_V^p \,\mathrm{d}s - \kappa \int_0^t \|i(u_n(s))\|_H^2 \,\mathrm{d}s - \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Zusammen mit $(i_c^n u_n)(t) = (i_c u_n)(t)$, $(i_c^n u_n)(0) = u_0^n$ in H und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_0^n\|_H \leq \|u_0\|_H$ folgt daraus für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \overline{I}$, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|(i_c u_n)(t)\|_H^2 + \mu \int_0^t \|u_n(s)\|_V^p \,\mathrm{d}s &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \|\lambda\|_{L^1(I)} + \kappa \int_0^t \|i(u_n(s))\|_H^2 \,\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \|\lambda\|_{L^1(I)} \\
&\quad + \int_0^t 2\kappa \left(\frac{1}{2}\|i(u_n(s))\|_H^2 + \mu \int_0^s \|u_n(\tau)\|_V^p \,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Die Grönwall'sche Ungleichung (*cf.* [Emm04, Lemma 7.3.1, S. 180]) angewendet auf die Funktionen $f_n \in C^0(\overline{I})$, $n \in \mathbb{N}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_n(t) \coloneqq \frac{1}{2}\|(i_c u_n)(t)\|_H^2 + \mu \int_0^t \|u_n(s)\|_V^p \,\mathrm{d}s \qquad \text{für alle } t \in \overline{I}\,,$$

liefert dann für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\frac{1}{2}\|(i_c u_n)(t)\|_H^2 + \mu \int_0^t \|u_n(s)\|_V^p \,\mathrm{d}s \leq \left(\frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \|\lambda\|_{L^1(I)} \right) \exp(2\kappa T) \qquad \text{für alle } t \in \overline{I}\,.$$

Mit anderen Worten gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
\|i_c u_n\|_{C_b^0(I;H)} &\leq \sqrt{(\|u_0\|_H^2 + 2\,\|\lambda\|_{L^1(I)}) \exp(2\kappa T)}\,, \\
\|u_n\|_{L^p(I;V)} &\leq \left(\left(\frac{1}{2\mu}\,\|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\mu}\,\|\lambda\|_{L^1(I)} \right) \exp(2\kappa T) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit von $\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)$ (*cf.* Lemma 6.6) folgern zusätzlich für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}u_n\|_{L^{p'}(I;V^*)} &\leq \alpha\,\|u_n\|_{L^p(I;V)}^{p-1} + \|\beta\|_{L^{p'}(I)} \\
&\leq \left(\left(\frac{1}{2\mu}\|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\mu}\,\|\lambda\|_{L^1(I)} \right) \exp(2\kappa T) \right)^{\frac{1}{p'}} + \|\beta\|_{L^{p'}(I)}\,.
\end{aligned}$$

1.4 Schwache Konvergenz der Galerkin-Lösungen: Da H, $L^p(I;V)$ und $L^{p'}(I;V^*)$ reflexiv sind (*cf.* Theorem 3.3), existiert eine Teilfolge, die wir der Einfachheit nicht umbenennen, ein Element $u_T \in H$ und Funktionen $u \in L^p(I;V)$ und $\xi \in L^{p'}(I;V^*)$, sodass

$$\begin{aligned} (i_c u_n)(T) &\rightharpoonup u_T && \text{in } H && (n \to \infty)\,, \\ u_n &\rightharpoonup u && \text{in } L^p(I;V) && (n \to \infty)\,, \\ \mathcal{A} u_n &\rightharpoonup \xi && \text{in } L^{p'}(I;V^*) && (n \to \infty)\,. \end{aligned}$$

1.5 Grenzübergang im Galerkin-System: Sei $v \in V_k$, wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist, und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$. Wegen $V_n \subseteq V_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $v \in V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Insbesondere gilt, dass $v\varphi \in L^p(I;V_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Wählen wir im Galerkin-System (GS) als Testfunktion $\varphi_n := v\varphi \in L^p(I;V_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$, so erhalten wir nach anschließender (verallgemeinerter) partieller Integration (*cf.* Theorem 5.6(ii))

$$\begin{aligned} ((i_c u_n)(T), iv)_H \varphi(T) + \int_I ((iu_n)(t), iv)_H \, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= (u_0^n, iv)_H \varphi(0) \\ &\quad + \int_I \langle A(t)(u_n(t)), v\rangle_V \, \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir schließlich, dass

$$(u_T, iv)_H \varphi(T) + \int_I ((iu)(t), iv)_H \, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (u_0^n, iv)_H \varphi(0) + \int_I \langle \xi(t), v\rangle_V \, \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Da $v \in V_k$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig waren und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in V liegt folgt für alle $v \in V$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$, dass

$$(u_T, iv)_H \varphi(T) + \int_I ((iu)(t), iv)_H \, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (u_0, iv)_H \varphi(0) + \int_I \langle \xi(t), v\rangle_V \, \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Da letztere Identität insbesondere für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, folgt zusammen mit Lemma 5.4, dass

$$u \in W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*) \qquad \text{mit} \qquad \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} = -\xi \qquad \text{in } L^2(I;V^*)\,.$$

Mit der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (*cf.* Theorem 5.6(ii)) erhalten wir außerdem für alle $v \in V$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$, dass

$$((i_c u)(T) - u_T, iv)_H \varphi(T) - ((i_c u)(0) - u_0, iv)_H \varphi(0) = 0\,.$$

wobei $i_c u \in C^0(\overline{I};H)$ der stetige Repräsentant aus Theorem 5.6(i) ist. Da $R(i)$ dicht in V liegt, folgern wir daraus für $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(T) = 1$ oder $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(T) = 0$, dass

$$\begin{aligned} (i_c u)(T) &= u_T && \text{in } H\,, \\ (i_c u)(0) &= u_0 && \text{in } H\,. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann, dass

$$(i_c u_n)(T) \rightharpoonup (i_c u)(T) \quad \text{in } H \quad (n \to \infty)\,.$$

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $u \in W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)$ mit einem stetigen Repräsentanten $i_c u \in C^0(\overline{I};H)$ und

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} + \xi &= 0 && \text{in } L^{p'}(I;V^*)\,,\\ (i_c u)(0) &= u_0 && \text{in } H\,. \end{aligned}$$

1.6 Identifikation von $\mathcal{A}u$ und ξ: Da $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, eine Familie von monotonen Operatoren ist, gilt für alle $v, w \in L^p(I;V)$, dass

$$\langle R_V \mathcal{A}v - R_V \mathcal{A}w, v - w\rangle_{L^p(I;V)} = \int_I \langle A(t)(v(t)) - A(w(t)), v(t) - w(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t \geq 0\,,$$

d.h. der Operator $R_V\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \to (L^p(I;V))^*$ ist monoton. Da $\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)$ demi-stetig ist (*cf.* Lemma 6.6) und $R_V\colon L^{p'}(I;V^*) \to (L^p(I;V))^*$ linear und stetig, d.h. insbesondere schwach stetig, ist $R_V\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \to (L^p(I;V))^*$ sogar demi-stetig. Insgesamt genügt $R_V\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \to (L^p(I;V))^*$ als monotoner, demi-stetiger Operator der Bedingung (M) (Übung), sodass nur noch zu zeigen bleibt, dass

$$\limsup_{n\to\infty}\big\{\langle R_V\mathcal{A}u_n, u_n\rangle_{L^p(I;V)}\big\} \leq \langle R_V \xi, u\rangle_{L^p(I;V)}\,.$$

Tatsächlich gilt für $\varphi_n \coloneqq u_n \in L^p(I;V)$ im Galerkin-System (GS) mit der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (*cf.* Theorem 5.6(ii)), dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\big\{\langle R_V\mathcal{A}u_n, u_n\rangle_{L^p(I;V)}\big\} &= \limsup_{n\to\infty}\bigg\{\int_I \langle A(t)(u(t)), u_n(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t\bigg\}\\
&= \limsup_{n\to\infty}\bigg\{-\int_I \bigg\langle \frac{\mathrm{d}_{e_n} u_n}{\mathrm{d}t}(t), u_n(t)\bigg\rangle_{V_n} \mathrm{d}t\bigg\}\\
&= \limsup_{n\to\infty}\bigg\{-\frac{1}{2}\|(i_c^n u_n)(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|(i_c^n u_n)(0)\|_H^2\bigg\}\\
&\leq \limsup_{n\to\infty}\bigg\{-\frac{1}{2}\|(i_c u_n)(T)\|_H^2\bigg\} + \limsup_{n\to\infty}\bigg\{\frac{1}{2}\|u_n^0\|_H^2\bigg\}\\
&= -\liminf_{n\to\infty}\bigg\{\frac{1}{2}\|(i_c u_n)(T)\|_H^2\bigg\} + \lim_{n\to\infty}\bigg\{\frac{1}{2}\|u_n^0\|_H^2\bigg\}\\
&\leq -\frac{1}{2}\|(i_c u)(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2\\
&= -\int_I \bigg\langle \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}(t), u(t)\bigg\rangle_V \mathrm{d}t\\
&= \int_I \langle \xi(t), u(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t = \langle R_V\xi, u_n\rangle_{L^p(I;V)}\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen der Bedingung (M) direkt, dass $R_V\mathcal{A}u = R_V\xi$ in $(L^p(I;V))^*$ und wegen der Injektivität von $R_V\colon L^{p'}(I;V^*) \to (L^p(I;V))^*$ (*cf.* Theorem 2.19) schließlich $\mathcal{A}u = \xi$ in $L^{p'}(I;V^*)$, was wir hier nochmal nachrechnen wollen:

Wegen der Monotonie von $R_V\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \to (L^p(I;V))^*$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \in L^p(I;V)$, dass

$$\langle R_V\mathcal{A}u_n - R_V\mathcal{A}v, u_n - v\rangle_{L^p(I;V)} \geq 0\,,$$

d.h.

$$\langle R_V\mathcal{A}u_n, u_n\rangle_{L^p(I;V)} \geq \langle R_V\mathcal{A}u_n, v\rangle_{L^p(I;V)} + \langle R_V\mathcal{A}v, u_n - v\rangle_{L^p(I;V)}\,.$$

Bilden wir den Limes Superior bezüglich $n \to \infty$ auf beiden Seiten dann folgt für alle $v \in L^p(I;V)$, dass

$$\langle R_V\xi, v\rangle_{L^p(I;V)} \geq \langle R_V\xi, v\rangle_{L^p(I;V)} + \langle R_V\mathcal{A}v, u - v\rangle_{L^p(I;V)}\,,$$

d.h.

$$\langle R_V\xi - R_V\mathcal{A}v, u - v\rangle_{L^p(I;V)} \geq 0\,.$$

Für $v := u + r\,w \in L^p(I;V)$, wobei $r > 0$ und $w \in L^p(I;V)$ beliebig sind, erhalten wir dann, dass

$$\langle R_V\xi - R_V\mathcal{A}(u + r\,w), w\rangle_{L^p(I;V)} \geq 0\,,$$

wobei wir noch durch $r > 0$ geteilt haben Im Grenzübergang $r \to 0$ folgt wegen der Demi-Stetigkeit von $R_V\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \to (L^p(I;V))^*$, dass für alle $w \in L^p(I;V)$ gilt, dass

$$\langle R_V\xi - R_V\mathcal{A}u, w\rangle_{L^p(I;V)} \geq 0\,,$$

d.h. $R_V\mathcal{A}u = R_V\xi$.

2. Eindeutigkeit/Demi-Stetigkeit: (Übung) □

Als Anwendung des instationären Satzes von Browder–Minty (*cf.* Theorem 6.17) erhalten wir die schwache Lösbarkeit der instationären p-Laplace-Gleichung, welche nach einer zeitlichen Wärmeentwicklung $u\colon [0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sucht, sodass

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f && \text{in } (0,T) \times \Omega\,,\\
u &= 0 && \text{auf } (0,T) \times \partial\Omega\,,\\
u(0,\cdot) &= u_0 && \text{in } \Omega\,.
\end{aligned}$$

Korollar 6.18 (p-Laplace-Gleichung)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $p \in [\frac{2d}{d+2}, \infty)$ und $I = (0,T)$, $0 < T < \infty$.

Dann existiert zu einem beliebigen Paar von Daten $(f, u_0) \in L^{p'}(I; (W_0^{1,p}(\Omega))^*) \times L^2(\Omega)$ ein eindeutiges $u \in W_e^{1,p,p'}(I; W_0^{1,p}(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*)$ mit einem stetigen Repräsentanten $u_c \in C^0(\overline{I}; L^2(\Omega))$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}u &= f \qquad && \text{in } L^{p'}(I; (W_0^{1,p}(\Omega))^*)\,, \\ u_c(0) &= u_0 && \text{in } L^2(\Omega)\,, \end{aligned} \tag{6.19}$$

wobei $\mathcal{A}\colon L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \to L^{p'}(I; (W_0^{1,p}(\Omega))^*)$, für alle $v \in L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$ definiert durch

$$(\mathcal{A}v)(t) \coloneqq A(v(t)) \qquad \text{in } (W_0^{1,p}(\Omega))^* \qquad \text{für f.a. } t \in I\,,$$

den instationären schwachen p-Laplace-Operator bezeichnet, wobei $A\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, für alle $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle Av, w\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \coloneqq \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x$$

den (stationären) schwachen p-Laplace-Operator bezeichnet.

Bevor wir Korollar 6.18 beweisen, wollen wir noch äquivalente Formulierungen zur Evolutionsgleichung herleiten.

Bemerkung 6.20 (Äquivalente schwache Formulierungen zu (6.19))
Die folgenden schwachen Formulierungen sind äquivalent zur Evolutionsgleichung (6.19):

(i) Punktweise Formulierung: *Die Evolutionsgleichung (6.19) ist äquivalent dazu, dass*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}(t) + A(u(t)) &= f(t) \qquad && \text{in } (W_0^{1,p}(\Omega))^* \qquad \text{für f.a. } t \in I\,, \\ u_c(0) &= u_0 && \text{in } L^2(\Omega)\,, \end{aligned}$$

(ii) Schwache Formulierung: *Die Evolutionsgleichung (6.19) ist äquivalent dazu, dass für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T) = 0$ gilt, dass*

$$\begin{aligned} -\int_I \bigg(\int_\Omega u(t) v \,\mathrm{d}x\bigg)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + \int_I \bigg(\int_\Omega |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\bigg)\varphi(t)\,\mathrm{d}t& \\ = \int_\Omega u_0 v \,\mathrm{d}x \varphi(0) + \int_I \langle f(t), v\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \,\mathrm{d}t\,.& \end{aligned}$$

Beweis (von Korollar 6.18). Laut Beispiel 5.3 ist $(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), \mathrm{id}_{W_0^{1,p}(\Omega)})$ ein Gelfand-Dreier. Insbesondere ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ sowohl separabel als auch reflexiv. Es ist also nur zu prüfen, dass die zeitlich konstante Familie von monotonen Operatoren $A\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ die Carathéodory-Bedingung, die (p, p')-Majoranten-Bedingung, und die p-Semi-Koerzivität-Bedingung erfüllt:

1. Carathéodory-Bedingung: Da wir eine zeitlich konstante Familie von linearen Operatoren betrachten, reicht es die Demi-Stetigkeit zu überprüfen. Diese ist gesichert, da $A\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ sogar stetig ist.

2. (p, p')-Majoranten-Bedingung: Für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
\|Av\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))^*} &= \sup_{\substack{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le 1}} \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x \\
&\le \| |\nabla v|^{p-2} \nabla v \|_{(L^{p'}(\Omega))^d} \\
&= \|\nabla v\|_{(L^p(\Omega))^d}^{p-1} \\
&\le \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} .
\end{aligned}$$

3. p-Semi-Koerzivitäts-Bedingung: Für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
\langle Av, v \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} &= \|\nabla v\|_{(L^p(\Omega))^d}^p \\
&\ge c_{\mathrm{P}}^{-p} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p .
\end{aligned}$$

Der instationäre Satz von Browder–Minty (*cf.* Theorem 6.17) liefert daher die Behauptung. $\square$

6.4 Instationärer Satz von Brézis

In diesem Abschnitt wollen wir ein instationäres Analogon des Satzes von Brézis[5] beweisen. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir zunächst dessen Aussage.

Satz 6.21 (von Brézis)
Sei V ein reflexiver, separabler Banach-Raum und $A\colon V \to V^*$ ein Operator, der den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Beschränktheit: *Für eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ gilt, dass*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_V < \infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Av_n\|_{V^*} < \infty\,.$$

(ii) Pseudo-Monotonie: *Für eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ und ein Element $v \in V$ folgt aus*

$$\begin{aligned} &v_n \rightharpoonup v \quad \text{in } V \quad (n \to \infty)\,,\\ &\limsup_{n\to\infty} \langle Av_n, v_n - v\rangle_V \le 0\,, \end{aligned}$$

dass

$$\langle Av, v - w\rangle_V \le \liminf_{n\to\infty} \langle Av_n, v_n - w\rangle_V \quad \text{für alle } w \in V\,.$$

(iii) Koerzivität: *(cf. Lemma 6.7(iii)).*
Dann ist $A\colon V \to V^*$ surjektiv.

Die Aussage des instationären Analogons ist die folgende.

Theorem 6.22 (Instationärer Satz von Brézis)
Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier, wobei V separabel und reflexiv ist, $p \in (1, \infty)$ und $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Sei weiter $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, eine Familie von pseudo-monotonen Operatoren, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Carathéodory-Bedingung: *$A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, genügt der Carathéodory-Bedingung (cf. Definition 6.3(i));*

(ii) Verallgemeinerte (p, p')-Majoranten-Bedingung: *Es existiert monoton wachsende Funktion $\mathscr{B}\colon \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ und eine Funktion $\beta \in L^{p'}(I)$, sodass*

$$\|A(t)v\|_{V^*} \le \mathscr{B}(\|iv\|_H)\left(\|v\|_V^{p-1} + \beta(t)\right) \quad \text{für f.a. } t \in I \text{ und alle } v \in V\,;$$

(iii) p-Semi-Koerzivität-Bedingung: *Es existieren Konstanten $\mu > 0$, $\kappa \ge 0$ und eine Funktion $\lambda \in L^1(I)$, sodass*

$$\langle A(t)v, v\rangle_V \ge \mu\,\|v\|_V^p - \kappa\,\|iv\|_H^2 + \lambda(t) \quad \text{für f.a. } t \in I \text{ und alle } v \in V\,.$$

[5] Haim Brézis, geb. 1944 in Riom-es-Montagnes. Brézis ist Professor an der Pariser Universite Pierre et Marie Curie und beschäftigt sich vor allem mit Fragen der Funktionalanalysis und deren Anwendung auf nichtlineare Differentialgleichungen und Variationsungleichungen. Brézis ist Mitglied mehrerer wissenschaftlicher Akademien. Er schrieb unter anderem die beiden Bücher [Bré73, Bré11].

Dann existiert zu jedem Paar von Daten $(f, u_0)^\top \in L^{p'}(I; V^*) \times H$ *ein* $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$*, sodass*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}u &= f \qquad \text{in } L^{p'}(I; V^*)\,, \\ (i_c u)(0) &= u_0 \qquad \text{in } H\,. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Der Operator

$$\left(\frac{\mathrm{d}_e}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}, (i_c \cdot)(0)\right)^\top : W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \to L^{p'}(I; V^*) \times H\,,$$

ist surjektiv.

Bevor wir den instationären Satz von Brézis (*cf.* Theorem 6.22) beweisen können, müssen wir zunächst Bochner-Pseudomonotonie, die natürliche Verallgemeinerung von Pseudomonotonie für Evolutionsgleichungen, einführen und untersuchen.

6.4.1 Bochner-Pseudomonotonie

Wir erinnern uns daran, dass die Identifikation von $\mathcal{A}u$ und ξ im Beweis des instationären Satzes von Browder–Minty (*cf.* Theorem 6.17), essentiell darauf beruht hat, dass für eine Familie von monotonen Operatoren $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, die der Carathéodory-Bedingung und der (p, p')-Majoranten-Bedingung genügt, der induzierte Operator $\mathcal{A}\colon L^p(I; V) \to L^{p'}(I; V^*)$ monoton und demi-stetig ist, und damit der Bedingung (M) genügt.

Des Weiteren wissen wir bereits, dass jeder pseudomonotone Operator der Bedingung (M) genügt, sodass der Beweis des instationären Satzes von Browder–Minty (*cf.* Theorem 6.17) auch funktioniert, falls wir darauf verzichten, dass $A(t)\colon V \to V^*$ für f.a. $t \in I$ monoton ist, und direkt annehmen, dass $\mathcal{A}\colon L^p(I; V) \to L^{p'}(I; V^*)$ pseudomonoton ist. Dann stellt sich allerdings die Frage, welche Bedingungen an die Familie von Operatoren $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, hinreichend sind, um sicherzustellen, dass $\mathcal{A}\colon L^p(I; V) \to L^{p'}(I; V^*)$ pseudomonoton ist. Die folgende Bemerkung zeigt, dass hierfür nicht ausreichend ist, dass $A(t)\colon V \to V^*$ für f.a. $t \in I$ pseudomonoton ist.

Bemerkung 6.23 (Konvektiver Term)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$*,* $d \in \mathbb{N}$*, ein beschränktes Gebiet,* $p \in [\frac{3d+3}{d+2}, +\infty)$ *und* $I := (0, T)$*,* $0 < T < \infty$*.*

Für $\mathcal{V} := \{\varphi \in (C_c^\infty(\Omega))^d \mid \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ in } \Omega\}$ *definieren wir*

$$\begin{aligned} W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega) &:= \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{(W^{1,p}(\Omega))^d}}\,, \\ L_{0,\sigma}^{2}(\Omega) &:= \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{(L^{2}(\Omega))^d}}\,. \end{aligned}$$

Dann ist $(W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega), L_{0,\sigma}^2(\Omega), \mathrm{id}_{W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)})$ *ein Gelfand-Dreier.*

(i) Der <u>stationäre konvektive Term</u> $C\colon W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega) \to (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*$, *für alle* $\mathbf{u},\mathbf{v} \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ *definiert durch*

$$\langle C\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} := -\int_\Omega \mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\,,$$

wohldefiniert, beschränkt und pseudo-monoton:

<u>Zur Wohldefiniert/Beschränktheit.</u> *Aus der Gagliardo–Nirenberg-Ungleichung (cf. [Kal23, Lemma 3.4]) folgt, dass für alle* $u \in W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ *gilt, dass*

$$\|u\|_{L^{p_*}(\Omega)}^{p_*} \le c\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2p}{d}}\,, \tag{6.24}$$

wobei $p_* := p\frac{d+2}{d} \in (1,+\infty)$ *der* <u>parabolische Sobolev'sche Einbettungsexponent</u> *ist. Da für* $p \ge \frac{3d+2}{d+2}$ *gilt, dass* $2p' \le p_*$, *folgt für alle* $\mathbf{u},\mathbf{v} \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ *mit* $\|\mathbf{v}\|_{(W^{1,p}(\Omega))^d} \le 1$, *dass*

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\right| &\le \|\mathbf{u}\|_{(L^{2p'}(\Omega))^d}\|\nabla\mathbf{v}\|_{(L^p(\Omega))^{d\times d}}\\
&\le c\,\|\nabla\mathbf{u}\|_{(L^p(\Omega))^{d\times d}}^{\frac{2p}{p_*}}\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^d}^{\frac{4p}{dp_*}}\\
&= c\,\|\nabla\mathbf{u}\|_{(L^p(\Omega))^{d\times d}}^{\frac{2d}{d+2}}\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^d}^{\frac{4}{d+2}}\\
&\le c\,(1+\|\nabla\mathbf{u}\|_{(L^p(\Omega))^{d\times d}})^{p-1}\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^d}^{\frac{4}{d+2}}\\
&\le c\,(1+\|\nabla\mathbf{u}\|_{(L^p(\Omega))^{d\times d}}^{p-1})\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^d}^{\frac{4}{d+2}}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir sowohl(6.24) und $\frac{2d}{d+2} \le p-1$ *(äquivalent zu* $p \ge \frac{3d+2}{d+2}$*) ausgenutzt haben, d.h. für alle* $\mathbf{u} \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ *gilt, dass* $C\mathbf{u} \in (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*$ *mit*

$$\|C\mathbf{u}\|_{(W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*} \le c\,(1+\|\nabla\mathbf{u}\|_{(L^p(\Omega))^{d\times d}}^{p-1})\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^d}^{\frac{4}{d+2}}\,, \tag{6.25}$$

d.h. $C\colon W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega) \to (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*$ *ist wohldefiniert und beschränkt.*

<u>Zur Pseudomonotonie.</u> *Für eine Folge* $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ *und eine Funktion* $\mathbf{u} \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ *folgt aus*

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{in } W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega) \quad (n\to\infty)\,,$$

mit Hilfe von Rellich's Kompaktheitssatz und wegen $p^* > 2p'$ *(äquivalent zu* $p > \frac{3d}{d+2}$*), dass*

$$\mathbf{u}_n \to \mathbf{u} \quad \text{in } (L^{2p'}(\Omega))^d \quad (n\to\infty)\,,$$

und damit

$$C\mathbf{u}_n \to C\mathbf{u} \quad \text{in } (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^* \quad (n\to\infty)\,,$$

d.h. $C\colon W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega) \to (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*$ *ist stark stetig und damit auch pseudomonoton.*

(ii) Der <u>instationäre konvektive Term</u> $\mathcal{C}\colon L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))\cap L^\infty(I;L^2_{0,\sigma}(\Omega)) \to L^{p'}(I;(W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*)$, *für alle* $\mathbf{u}\in L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))\cap L^\infty(I;L^2_{0,\sigma}(\Omega))$ *definiert durch*

$$(\mathcal{C}\mathbf{u})(t) \coloneqq C(\mathbf{u}(t)) \quad \text{in } (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^* \quad \text{für f.a. } t\in I\,,$$

wohldefiniert und beschränkt, aber nicht pseudo-monoton:

<u>Zur Wohldefiniert/Beschränktheit.</u> *Folgt aus* (6.25) *und Satz 6.32.*

<u>Zur Pseudomonotonie.</u> *Sei* $\mathbf{v}\in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)\setminus\{\mathbf{0}\}$, *sodass* $C\mathbf{v}\in (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*\setminus\{\mathbf{0}\}$. *Dann existiert ein* $\mathbf{w}\in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$, *sodass*

$$\langle C\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} > 0\,.$$

Wir betrachten die Folge $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))\cap L^\infty(I;L^2_{0,\sigma}(\Omega))$, *für alle* $n\in\mathbb{N}$ *definiert durch*

$$\mathbf{u}_n(t,x)\coloneqq f_n(t)\mathbf{v}(x) \quad \text{für alle } (t,x)^\top\in I\times\Omega\,,$$

wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C^\infty(\overline{I})$, *für alle* $n\in\mathbb{N}$ *definiert durch*

$$f_n(t)\coloneqq \sin(nt) \quad \text{für alle } t\in I\,.$$

Wegen $f_n\rightharpoonup 0$ *in* $L^p(I)$ $(n\to\infty)$ *(Übung), folgern wir, dass (Übung)*

$$\mathbf{u}_n\rightharpoonup\mathbf{0} \quad \text{in } L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)) \quad (n\to\infty)\,.$$

Schließlich gilt wegen $\langle C\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_n\rangle_{V_2}=0$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$ *(Übung), dass*

$$\limsup_{n\to\infty}\langle\mathcal{C}\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_n-\mathbf{0}\rangle_{L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))}=0\,.$$

Gleichzeitig gilt jedoch

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\langle\mathcal{C}\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_n-\mathbf{w}\rangle_{L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))} &= -\limsup_{n\to\infty}\langle\mathcal{C}\mathbf{u}_n,\mathbf{w}\rangle_{L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))}\\
&= -\lim_{n\to\infty}\|f_n\|^2_{L^2(I)}\langle C\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}\\
&= -\pi\langle C\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}\\
&< 0\\
&= \langle\mathcal{C}\mathbf{0},\mathbf{0}-\mathbf{w}\rangle_{L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))}\,,
\end{aligned}$$

d.h. der Operator $R_V\mathcal{C}\colon L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))\cap L^\infty(I;L^2_{0,\sigma}(\Omega))\to(L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)))^*$ *ist nicht pseudomonoton.*

Bemerkung 6.23 zeigt, dass sich Pseudomonotonie, im Gegensatz zu Monotonie, nicht von der Familie von Operatoren $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, auf den induzierten Operator $\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H) \to L^{p'}(I;V^*)$ vererbt.

Definition 6.26 (Bochner-Pseudomonotonie)
Sei (V,H,i) ein Gelfand-Tripel, $p \in (1,+\infty)$, und $I \coloneqq (0,T)$, $0 < T < \infty$.

Dann heißt ein Operator $\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H) \to (L^p(I;V))^*$ Bochner-pseudomonoton*, falls für eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H)$ aus*

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{in } L^p(I;V) \quad (n \to \infty)\,, \tag{6.27}$$

$$iu_n \overset{*}{\rightharpoonup} iu \qquad \text{in } L^\infty(I;H) \quad (n \to \infty)\,, \tag{6.28}$$

$$(iu_n)(t) \rightharpoonup (iu)(t) \qquad \text{in } H \quad (n \to \infty) \quad \text{for f.a. } t \in I\,, \tag{6.29}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \int_I \langle (\mathcal{A}u_n)(t), u_n(t) - u(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t \le 0\,, \tag{6.30}$$

für alle $v \in L^p(I;V)$ folgt, dass

$$\int_I \langle (\mathcal{A}u)(t), u(t) - v(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t \le \liminf_{n\to\infty} \int_I \langle (\mathcal{A}u_n)(t), u_n(t) - v(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t\,.$$

Bemerkung 6.31 (Der Raum $L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H)$)
In Definition 6.26, mit leichtem Genauigkeitsverlust, definieren wir den Raum

$$L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H) \coloneqq \big\{ v \in L^p(I;V) \mid iv \in L^\infty(I;H) \big\}\,,$$

der ausgestattet mir der Norm

$$\|\cdot\|_{L^p(I;V)\cap L^\infty(I;H)} \coloneqq \|\cdot\|_{L^p(I;V)} + \|i(\cdot)\|_{L^\infty(I;H)}\,,$$

einen Banach-Raum definiert (Übung).

Der folgende Satz liefert hinreichende Bedingungen an eine Familie von pseudomonotonen Operatoren $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, sodass der induzierte Operator Bochner-pseudomonoton ist, und zeigt dadurch, dass Bochner-Pseudomonotonie die natürliche Verallgemeinerung von Pseudomonotonie für Evolutionsgleichungen ist.

Satz 6.32 (Hirano–Landes, 2019)
Sei (V,H,j) ein Gelfand-Tripel, wobei V reflexiv ist, $p \in (1,+\infty)$, und $I \coloneqq (0,T)$, $0 < T < \infty$.

Weiter sei $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, eine Familie von pseudomonotonen Operator, die den Voraussetzungen des instationären Satzes von Brézis (cf. Theorem 6.22) genügt. Dann ist der induzierte Operator $\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H) \to (L^p(I;V))^*$ wohldefiniert, beschränkt, demi-stetig und Bochner-pseudomonoton.

Beweis. <u>*1. Wohldefiniertheit/Beschränktheit:*</u> Sei $u \in L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H)$ beliebig, aber fest. Laut Lemma 6.5 gilt, dass $\mathcal{A}u \in L^0(I;V^*)$, sodass nur noch die p'-Integrabilität zu zeigen bleibt. Wegen

$$\begin{aligned}\bigg(\int_I \|(\mathcal{A}u)(t)\,\mathrm{d}t\bigg)^{\frac{1}{p'}} &\le \bigg(\int_I \Big(\mathscr{B}(\|i(u(t))\|_H)\big(\|u(t)\|_V^{p-1} + \beta(t)\big)\Big)^{p'}\,\mathrm{d}t\bigg)^{\frac{1}{p'}} \\ &\le \mathscr{B}(\|iu\|_{L^\infty(I;H)})\big(\|u\|_{L^p(I;V)}^{p-1} + \|\beta\|_{L^{p'}(I)}\big)\,,\end{aligned}$$

wobei von der Minkowski-Ungleichung und von $\|u(\cdot)\|_V \in L^p(I)$, $\|i(u(\cdot))\|_H \in L^\infty(I)$ (*cf.* Definition 2.1) Gebrauch gemacht wurde, ist $\mathcal{A}u \in L^{p'}(I;V^*)$, d.h. $\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H) \to L^{p'}(I;V^*)$ wohldefiniert. Insbesondere folgt damit auch schon die Beschränktheit von $\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H) \to L^{p'}(I;V^*)$.

<u>*2. Demi-Stetikeit:*</u> Folgt analog zu Lemma 6.6 (Übung).

<u>*3. Bochner-Pseudomonotonie:*</u> Wir gehen in vier Schritten vor:

<u>*1. Schritt: Sammeln von Informationen:*</u> Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;V)\cap L^\infty(I;H)$ eine Folge, die (6.27)–(6.30) erfüllt. Dann ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;V)\cap L^\infty(I;H)$ insbesondere beschränkt. Aus der Beschränktheit von $\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H) \to L^{p'}(I;V^*)$ folgt dann weiter, dass die Folge $(\mathcal{A}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^{p'}(I;V^*)$ beschränkt ist. Aus der Reflexivität von $L^{p'}(I;V^*)$ (*cf.* Theorem 3.3) folgt dann, dass eine Teilfolge $(u_n)_{n\in\Lambda}$, $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ und eine Funktion $\xi \in L^{p'}(I;V^*)$ existieren, sodass

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u_n &\rightharpoonup \xi \quad \text{in } L^{p'}(I;V^*) && (\Lambda \ni n \to \infty)\,,\\ \int_I \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t)\rangle_V\,\mathrm{d}t &\to \liminf_{n\to\infty} \int_I \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t)\rangle_V\,\mathrm{d}t && (\Lambda \ni n \to \infty)\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $v \in L^p(I;V)$, dass

$$\lim_{\Lambda\ni n\to\infty} \int_I \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - v(t)\rangle_V\,\mathrm{d}t \le \liminf_{n\to\infty} \int_I \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - v(t)\rangle_V\,\mathrm{d}t\,. \tag{6.33}$$

Wegen (6.29) existiert eine Lebesgue-messbare Menge $E \subseteq I$, sodass $\lambda^1(I \setminus E) = 0$ und

$$(iu_n)(t) \rightharpoonup (iu)(t) \quad \text{in } H \quad (n \to \infty) \quad \text{für alle } t \in I\,. \tag{6.34}$$

Zusammen mit (C.3) und (C.5) erhalten wir für f.a. $t \in I$, dass

$$\begin{aligned}\langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V &\ge \mu\,\|u_n(t)\|_V^p - \kappa\,\|i(u_n(t))\|_H + \lambda(t)\\ &\quad - \langle A(t)(u_n(t)), u(t)\rangle_V\\ &\ge \mu\,\|u_n(t)\|_V^p - \kappa\,\|i(u_n(t))\|_H + \lambda(t)\\ &\quad - \big(\mathscr{B}(\|i(u_n(t))\|_H)(\|u_n(t)\|_V^{p-1} + \beta(t)\big)\|u(t)\|_V\,.\end{aligned}$$

Aus $\|iu_n\|_{L^\infty(I;H)} \le K$ für eine Konstante $K > 0$, was aus (6.28) folgt, und der ε-Young-Ungleichung mir $k := k(\varepsilon, p) := (p'\varepsilon)^{1-p}/p$ und $\varepsilon := \mathscr{B}(K)^{-p'}\frac{\mu}{2}$, erhalten wir weiter für alle $n \in \Lambda$ und für f.a. $t \in I$, dass

$$\langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V \ge \frac{\mu}{2}\|u_n(t)\|_V^p - \mu_u(t)\,, \tag{$(*)_{n,t}$}$$

wobei $\mu_u \in L^1(I)$. Als Nächstes definieren wir

$$\begin{aligned} S := \big\{t \in E\,|A(t)\colon V \to V^* &\text{ ist pseudomonoton},\\ &|\mu_u(t)| < \infty \text{ und } (*)_{n,t} \text{ gilt für alle } n \in \Lambda\big\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt dann, das $\lambda^1(I \setminus S) = 0$.

<u>*2. Zwischenschritt:*</u> Als Nächstes zeigen wir, dass

$$\liminf_{\Lambda \ni n \to \infty} \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V \ge 0 \qquad \text{für alle } t \in S\,. \tag{$(**)_t$}$$

Sei dazu $t \in S$ beliebig, aber fest. Dann definieren wir

$$\Lambda_t := \{n \in \Lambda \mid \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V < 0\}\,.$$

Wir nehmen ohne Beschränkheit der Allgemeinheit an, dass Λ_t nicht endlich ist. Andernfalls wäre $(**)_t$ bereits wahr für dieses spezielle $t \in S$ und es wäre nichts mehr zu tun. Ist allerdings Λ_t nicht endlich, dann gilt, dass

$$\limsup_{\Lambda_t \ni n \to \infty} \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V \le 0\,. \tag{6.35}$$

Aus (6.35) zusammen mit $(*)_{n,t}$ folgt für alle $n \in \Lambda_t$, dass

$$\frac{\mu}{2}\|u_n(t)\|_V^p \le \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V + |\mu_u(t)| < |\mu_u(t)| < \infty\,. \tag{6.36}$$

Wegen (6.34) and (6.36), liefert Lemma 2.18, dass

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{ in } V \quad (\Lambda_t \ni n \to \infty)\,.$$

Die Pseudomonotonie von $A(t) : V \to V^*$ liefert schließlich, dass

$$\liminf_{\Lambda_t \ni n \to \infty} \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V \ge 0\,.$$

Wegen $\langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V \ge 0$ für alle $n \in \Lambda \setminus \Lambda_t$, gilt $(**)_t$ für alle $t \in S$.

<u>*3. Übergang auf Bildraum-Ebene:*</u> Wir zeigen, dass eine Teilfolge $(u_n)_{n\in\Lambda_0} \subseteq L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H)$, $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$, existiert, sodass

$$\begin{aligned} u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{ in } V \quad (\Lambda_0 \ni n \to \infty) \qquad &\text{für f.a. } t \in I\,,\\ \limsup_{\Lambda_0 \ni n \to \infty} \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V \le 0 \qquad &\text{für f.a. } t \in I\,. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Infolgedessen sind wir in der Lage, die Pseudomonotonie der Familie von Operatoren $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, zu nutzen. Wegen $\langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V \geq -\mu_u(t)$ für alle $t \in S$ und $n \in \Lambda$, ist das eine verallgemeinerte Version des Lemmas von Fatou (*cf.* [Rou05, Theorem 1.18]) anwendbar. Letztere liefert, auch unter Verwendung von $(**)_t$ und (6.30), dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_I \liminf_{\Lambda \ni n \to \infty} \langle A(s)(u_n(s)), u_n(s) - u(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s \\ &\leq \liminf_{\Lambda \ni n \to \infty} \int_I \langle A(s)(u_n(s)), u_n(s) - u(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s \\ &\leq \limsup_{\Lambda \ni n \to \infty} \int_I \langle A(s)(u_n(s)), u_n(s) - u(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s \\ &= \limsup_{n \to \infty} \langle \mathcal{A}u_n, u_n - u\rangle_{L^p(I;V)} \leq 0. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Wir definieren $h_n(t) \coloneqq \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_{V \cap_j H}$. Dann folgt $(**)_t$ und (6.38), dass

$$\liminf_{\Lambda \ni n \to \infty} h_n(t) \geq 0 \text{ for all } t \in S. \tag{6.39}$$

$$\lim_{\Lambda \ni n \to \infty} \int_I h_n(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{6.40}$$

Da $s \mapsto s^- \coloneqq \min\{0, s\}$ stetig und nicht-fallend ist, folgern wir aus (6.39), dass

$$0 \geq \limsup_{\Lambda \ni n \to \infty} h_n(t)^- \geq \liminf_{\Lambda \ni n \to \infty} h_n(t)^- \geq \min\left\{0, \liminf_{\Lambda \ni n \to \infty} h_n(t)\right\} = 0\,,$$

d.h. $h_n(t)^- \overset{n\to\infty}{\to} 0$ $(\Lambda \ni n \to \infty)$ für alle $t \in S$. Da $0 \geq h_n(t)^- \geq -\mu_u(t)$ für alle $t \in S$ und $n \in \Lambda$, liefert der Satz von Vitali, dass $h_n^- \to 0$ in $L^1(I)$ $(n \to \infty)$. Letztere impliziert wegen $|h_n| = h_n - 2h_n^-$ und (6.40), dass conclude that $h_n \to 0$ in $L^1(I)$ $(n \to \infty)$. Daher existiert eine Teilfolge $(u_n)_{n \in \Lambda_0}$, $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$, und eine Lebesgue-messbare Menge $F \subseteq I$ mit $\lambda^1(I \setminus F) = 0$, sodass

$$\lim_{\Lambda_0 \ni n \to \infty} \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V = 0 \qquad \text{für alle } t \in F\,. \tag{6.41}$$

Folglich gilt für alle $t \in S \cap F$, dass

$$\begin{aligned} \limsup_{\Lambda_0 \ni n \to \infty} \frac{\mu}{2}\|u_n(t)\|_V^p &\leq \limsup_{\Lambda_0 \ni n \to \infty} \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - u(t)\rangle_V + |\mu_u(t)| \\ &= |\mu_u(t)| < \infty\,. \end{aligned}$$

Wegen (6.34), liefert Lemma 2.18 für alle $t \in S \cap F$, dass

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{ in } V \quad (\Lambda_0 \ni n \to \infty)\,. \tag{6.42}$$

Die Konvergenzen (6.41) und (6.42) implizieren schließlich (6.37).

4. Übergang auf die Bochner–Lebesgue-Ebene: Wegen der Pseudomonotonie von $A(t): V \to V^*$ für alle $t \in S \cap F$, folgt für alle $v \in L^p(I;V)$, dass all $t \in S \cap F$ we deduce from (6.37) that

$$\langle A(t)(u(t)), u(t) - v(t)\rangle_V \leq \liminf_{\Lambda_0 \ni n \to \infty} \langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - v(t)\rangle_V \qquad \text{für f.a. } t \in I\,.$$

Analog zu Schritt 1 existiert eine Funktion $\mu_v \in L^1(I)$, sodass

$$\langle A(t)(u_n(t)), u_n(t) - v(t)\rangle_V \geq \frac{\mu}{2}\|u_n(t)\|_V^p - \mu_v(t) \qquad \text{für f.a. } t \in I \text{ und } n \in \Lambda_0\,.$$

Durch erneutes Anwenden von des Lemmas von Fatou zusammen mit (6.33) erhalten wir für alle $v \in L^p(I;V)$, dass

$$\begin{aligned}
\int_I \langle A(s)(u(s)), u(s) - v(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s &\leq \int_I \liminf_{\Lambda_0 \ni n \to \infty} \langle A(s)(u_n(s)), u_n(s) - v(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s \\
&\leq \liminf_{\Lambda_0 \ni n \to \infty} \int_I \langle A(s)(u_n(s)), u_n(s) - v(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s \\
&= \lim_{\Lambda \ni n \to \infty} \int_I \langle A(s)(u_n(s)), u_n(s) - v(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s \\
&\leq \liminf_{n \to \infty} \int_I \langle A(s)(u_n(s)), u_n(s) - v(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s\,,
\end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{A}\colon L^p(I;V) \to (L^p(I;V))^*$ ist Bochner-pseudomonoton. □

6.4.2 Beweis des instationären Satzes von Brézis

Mit Hilfe des Konzepts von Bochner-Pseudomonotonie und insbesondere dem Satz von Hirano–Landes (*cf.* Satz 6.32), können wir nun den instationären Satz von Brézis beweisen.

Beweis. *1. Existenz:* (mit Hilfe einer Galerkin-Approximation)

1.0 Reduktion auf triviale rechte Seite: Wir können ohne Beschränktheit der Allgemeinheit annehmen, dass $f = 0$ in $L^{p'}(I;V^*)$. Sonst betrachten wir die verschobene Familie von Operatoren $\widetilde{A}(t) \coloneqq A(t) - f(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, die dieselben Eigenschaften hat (Übung).

1.1 Konstruktion der Galerkin-Approximation: Analog zum instationären Lemma von Lax–Milgram (*cf.* Theorem 6.8).

1.2 Existenz von Galerkin-Lösungen: Analog zum instationären Lemma von Lax–Milgram (*cf.* Theorem 6.8).

1.3 A priori Abschätzungen: Analog zum instationären Satz von Browder–Minty (*cf.* Theorem 6.17) folgern wir für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|i_c u_n\|_{C_b^0(I;H)} \leq \sqrt{(\|u_0\|_H^2 + 2\,\|\lambda\|_{L^1(I)})\exp(2\kappa T)}\,,$$
$$\|u_n\|_{L^p(I;V)} \leq \bigg(\Big(\frac{1}{2\mu}\,\|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\mu}\,\|\lambda\|_{L^1(I)}\Big)\exp(2\kappa T)\bigg)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Wegen der Beschränktheit von $\mathcal{A}\colon L^p(I;V)\cap L^\infty(I;H) \to L^{p'}(I;V^*)$ (*cf.* Satz 6.32) folgern zusätzlich für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|\mathcal{A}u_n\|_{L^{p'}(I;V^*)} \leq \mathscr{B}(\|iu_n\|_{L^\infty(I;H)})\big(\|u_n\|_{L^p(I;V)}^{p-1} + \|\beta\|_{L^{p'}(I)}\big)\,.$$

1.4 Schwache Konvergenz der Galerkin-Lösungen: Da H, $L^p(I;V)$ und $L^{p'}(I;V^*)$ reflexiv sind (*cf.* Theorem 3.3), existiert eine Teilfolge, die wir der Einfachheit nicht umbenennen, ein Element $u_T \in H$ und Funktionen $u \in L^p(I;V)$ und $\xi \in L^{p'}(I;V^*)$, sodass

$$\begin{aligned}
(i_c u_n)(T) &\rightharpoonup u_T &&\text{in } H &&(n \to \infty)\,,\\
u_n &\rightharpoonup u &&\text{in } L^p(I;V) &&(n \to \infty)\,,\\
\mathcal{A}u_n &\rightharpoonup \xi &&\text{in } L^{p'}(I;V^*) &&(n \to \infty)\,.
\end{aligned}$$

1.5 Grenzübergang im Galerkin-System: Analog zum instationären Satz von Browder–Minty (*cf.* Theorem 6.17) folgern wir, dass

$$u \in W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*) \quad \text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} = -\xi \quad \text{in } L^2(I;V^*)\,,$$

und für den stetigen Repräsentanten $i_c u \in C^0(\overline{I};H)$ aus Theorem 5.6(i), dass

$$\begin{aligned}
(i_c u)(T) &= u_T &&\text{in } H\,,\\
(i_c u)(0) &= u_0 &&\text{in } H\,.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann, dass

$$(i_c u_n)(T) \rightharpoonup (i_c u)(T) \quad \text{in } H \quad (n \to \infty)\,.$$

1.6 Fast-überall schwache Konvergenz in H: Als Nächstes zeigen wir, dass

$$(i_c u_n)(t) \rightharpoonup (i_c u)(t) \quad \text{in } H \quad (n \to \infty) \quad \text{für f.a. } t \in \overline{I}\,. \tag{6.43}$$

Sei dazu $t \in \overline{I}$ beliebig, aber fest. Dann ist die Folge $((i_c u_n)(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ beschränkt und besitzt wegen der Reflexivität von H eine zunächst von t abhängige Teilfolge $(n_k^t)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und ein $u_t \in H$, sodass

$$(i_c u_{n_k^t})(t) \rightharpoonup u_t \quad \text{in } H \quad (k \to \infty)\,.$$

Sei $v \in V_{n_k^t}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist, und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(t) = 1$ und $\varphi(0) = 0$. Wegen $V_{n_k^t} \subseteq V_{n_{k+1}^t}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $v \in V_{n_\ell^t}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq k$. Insbesondere gilt, dass $v\varphi\chi_{[0,t]} \in L^p(I; V_{n_\ell^t})$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq k$. Wählen wir im Galerkin-System (GS) als Testfunktion $\varphi_{n_\ell^t} := v\varphi\chi_{[0,t]} \in L^p(I; V_{n_\ell^t})$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq k$, so erhalten wir nach anschließender (verallgemeinerter) partieller Integration (*cf.* Theorem 5.6(ii))

$$((i_c u_n)(t), iv)_H + \int_0^t ((iu_n)(t), iv)_H\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t \langle A(t)(u_n(t)), v\rangle_V\, \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir schließlich, dass

$$(u_t, iv)_H + \int_0^t ((iu)(t), iv)_H\, \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t \langle \xi(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Mit der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (*cf.* Theorem 5.6(ii)) erhalten wir außerdem für alle $v \in V$, dass

$$((i_c u)(t) - u_t, iv)_H = 0\,.$$

Da $R(i)$ dicht in H liegt, folgern wir, dass

$$(i_c u)(t) = u_t \quad \text{ in } H\,.$$

Insbesondere gilt dann, dass

$$(i_c u_{n_k^t})(t) \rightharpoonup (i_c u)(t) \quad \text{ in } H \quad (k \to \infty)\,.$$

Da diese Argumentation für jede von Teilfolge von $((i_c u_n)(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ wiederholt werden kann, existiert zu jeder Teilfolge von $((i_c u_n)(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ wieder eine Teilfolge, die schwach gegen $(i_c u)(t) \in H$ konvergiert. Das Teilfolgenkonvergenzprinzip liefert schließlich, dass die gesamte Folge $((i_c u_n)(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ gegen $(i_c u)(t) \in H$ konvergiert. Da $t \in \overline{I}$ beliebig gewählt war, erhalten wir schließlich (6.43).

1.7 Identifikation von $\mathcal{A}u$ und ξ: Analog zu Beweis des instationären Satz von Browder–Minty folgern wir, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \big\{\langle R_V \mathcal{A}u_n, u_n\rangle_{L^p(I;V)}\big\} \leq \langle R_V \xi, u\rangle_{L^p(I;V)}\,.$$

Daraus folgt wegen der Bochner-Pseudomonotonie für alle $v \in L^p(I;V)$, dass

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}_X \mathcal{A}u, u - v\rangle_{L^p(I;V)} &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle \mathcal{R}_X \mathcal{A}u_n, u_n - v\rangle_{L^p(I;V)} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \langle \mathcal{R}_X \mathcal{A}u_n, u_n\rangle_{L^p(I;V)} - \lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{R}_X \mathcal{A}u_n, v\rangle_{L^p(I;V)} \\ &\leq \langle \mathcal{R}_X \xi, u - v\rangle_{L^p(I;V)}\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $R_V \mathcal{A}u = R_V \xi$ in $(L^p(I;V))^*$ und wegen der Injektivität von $R_V : L^{p'}(I;V^*) \to (L^p(I;V))^*$ (*cf.* Theorem 2.19) schließlich $\mathcal{A}u = \xi$ in $L^{p'}(I;V^*)$.

□

Als Anwendung des instationären Satzes von Brézis (*cf.* Theorem 6.22) erhalten wir die schwache Lösbarkeit der instationären p-Navier–Stokes-Gleichungen, welche nach einer Geschwindigkeit $\mathbf{u}\colon [0,T)\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^d$ und einem Druck $\pi\colon (0,T)\times\Omega\to\mathbb{R}$ sucht, sodass

$$\begin{aligned}
\partial_t\mathbf{u} - \operatorname{div}(|\mathbf{Du}|^{p-2}\mathbf{Du}) + \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla\pi &= \mathbf{f} && \text{in } (0,T)\times\Omega\,,\\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{auf } (0,T)\times\Omega\,,\\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } (0,T)\times\partial\Omega\,,\\
\mathbf{u}(0,\cdot) &= \mathbf{u}_0 && \text{in } \Omega\,,
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{Du} \coloneqq \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^\top)\colon (0,T)\times\Omega\to\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$.

Korollar 6.44 (p-Navier–Stokes-Gleichungen)
Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $p\in[\frac{3d+2}{d+2},\infty)$ und $I=(0,T)$, $0<T<\infty$.

Dann existiert zu einem beliebigen Paar von Daten $(\mathbf{f},\mathbf{u}_0)^\top\in L^{p'}(I;(W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*)\times L^2_{0,\sigma}(\Omega)$ ein $\mathbf{u}\in W^{1,p,p'}_e(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega),(W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*)$ mit einem stetigen Repräsentanten $\mathbf{u}_c\in C^0(\overline{I};L^2_{0,\sigma}(\Omega))$, sodass

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}_e\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}\mathbf{u} &= \mathbf{f} && \text{in } L^{p'}(I;(W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*)\,,\\
\mathbf{u}_c(0) &= \mathbf{u}_0 && \text{in } L^2(\Omega)\,,
\end{aligned}\tag{6.45}$$

wobei $\mathcal{A}\colon L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))\cap L^\infty(I;L^2_{0,\sigma}(\Omega))\to L^{p'}(I;(W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*)$, für alle $\mathbf{u}\in L^p(I;W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))$ $\cap L^\infty(I;L^2_{0,\sigma}(\Omega))$ definiert durch

$$(\mathcal{A}\mathbf{v})(t) \coloneqq A(\mathbf{v}(t)) \quad \text{in } (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^* \quad \text{für f.a. } t\in I\,,$$

wobei $A\colon W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)\to(W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*$, für alle $\mathbf{v},\mathbf{w}\in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle A\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} \coloneqq \int_\Omega (|\mathbf{Dv}|^{p-2}\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) : \mathbf{Dw}\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevor wir Korollar 6.44 beweisen, wollen wir noch äquivalente Formulierungen zur Evolutionsgleichung herleiten.

Bemerkung 6.46 (Äquivalente schwache Formulierungen zu (6.45))
Die folgenden schwachen Formulierungen sind äquivalent zur Evolutionsgleichung (6.45):

(i) Punktweise Formulierung: *Die Evolutionsgleichung (6.45) ist äquivalent dazu, dass*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}_e\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}(t) + A(\mathbf{u}(t)) &= \mathbf{f}(t) && \text{in } (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^* \quad \text{für f.a. } t\in I\,,\\
\mathbf{u}_c(0) &= \mathbf{u}_0 && \text{in } L^2_{0,\sigma}(\Omega)\,,
\end{aligned}$$

(ii) Schwache Formulierung: *Die Evolutionsgleichung* (6.45) *ist äquivalent dazu, dass für alle* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *und* $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ *mit* $\varphi(T) = 0$ *gilt, dass*

$$-\int_I \Big(\int_\Omega \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}x\Big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + \int_I \Big(\int_\Omega (|\mathbf{Du}(t)|^{p-2}\mathbf{Du}(t) - \mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{u}(t)) : \mathbf{Dv}\,\mathrm{d}x\Big)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}x\varphi(0) + \int_I \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}\rangle_{W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweis (von Korollar 6.44). Laut Bemerkung 6.23 ist $(W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega), L_{0,\sigma}^2(\Omega), \mathrm{id}_{W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)})$ ein Gelfand-Dreier. Insbesondere ist $W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)$ separabel und reflexiv. Es ist also nur zu prüfen, dass die zeitlich konstante Familie von Operatoren $A\colon W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega) \to (W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega))^*$ pseudomonoton ist sowie die Carathéodory-Bedingung, die verallgemeinerte (p,p')-Majoranten-Bedingung, und die p-Semi-Koerzivität-Bedingung erfüllt:

1. Psuedomonotonie: Der (stationäre) Extra-Stresstensor $S\colon W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega) \to (W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega))^*$, für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle S\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_{W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)} := \int_\Omega |\mathbf{Dv}|^{p-2}\mathbf{Dv} : \mathbf{Dw}\,\mathrm{d}x\,,$$

ist wohldefiniert, beschränkt, stetig, monoton und damit pseudo-monoton (Übung). Der (stationäre) konvektive Term $C\colon W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega) \to (W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega))^*$ ist nach Bemerkung 6.23 pseudomonoton. Da die Summe zweier pseudomonotoner Operatoren wieder pseudomonoton ist, folgern wir, dass $A\colon W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega) \to (W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega))^*$ pseudomonoton ist.

2. Carathéodory-Bedingung: Da wir eine zeitlich konstante Familie von Operatoren betrachten, reicht es die Demi-Stetigkeit zu überprüfen. Diese ist gesichert, da $A\colon W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega) \to (W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega))^*$ sogar stetig ist.

3. Verallgemeinerte (p,p')-Majoranten-Bedingung: Für alle $\mathbf{v} \in W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)$ gilt, dass

$$\begin{aligned}\|S\mathbf{v}\|_{(W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega))^*} &= \sup_{\substack{\mathbf{w}\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \|\mathbf{w}\|_{W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)}\le 1}} \int_\Omega |\mathbf{Dv}|^{p-2}\mathbf{Dv} : \mathbf{Dw}\,\mathrm{d}x\\ &\le \||\mathbf{Dv}|^{p-2}\mathbf{Dv}\|_{(L^{p'}(\Omega))^{d\times d}}\\ &= \|\mathbf{Dv}\|_{(L^p(\Omega))^{d\times d}}^{p-1}\\ &\le \|\nabla\mathbf{v}\|_{(L^p(\Omega))^{d\times d}}^{p-1}\\ &\le \|\mathbf{v}\|_{W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)}^{p-1}\end{aligned}$$

und laut (6.25), dass

$$\|C\mathbf{v}\|_{(W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega))^*} \le c\,(1 + \|\mathbf{v}\|_{W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)}^{p-1})\|\mathbf{v}\|_{L_{0,\sigma}^2(\Omega)}^{\frac{4}{d+2}}\,.$$

Insgesamt gilt also für alle $\mathbf{v} \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$, dass

$$\|A\mathbf{v}\|_{(W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*} \le c\,(1 + \|\mathbf{v}\|^{p-1}_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)})\|\mathbf{v}\|^{\frac{4}{d+2}}_{L^2_{0,\sigma}(\Omega)}\,.$$

4. 2-Semi-Koerzivität-Bedingung: Für alle $\mathbf{v} \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ gilt, dass

$$\begin{aligned}\langle S\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} &= \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^p_{(L^p(\Omega))^{d\times d}}\\ &\ge c\,\|\nabla\mathbf{v}\|^p_{(L^p(\Omega))^{d\times d}}\\ &\ge c\,\|\mathbf{v}\|^p_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

und

$$\langle C\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} = 0\,.$$

Insgesamt gilt also für alle $\mathbf{v} \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$, dass

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} \ge c\,\|\mathbf{v}\|^p_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}\,.$$

Der instationäre Satz von Brézis (*cf.* Theorem 6.22) liefert daher die Behauptung. □

7 Kompaktheit in Bochner–Lebesgue-Räumen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit kompakten Teilmengen von Bochner–Lebesgue-Räumen. Neben dem Messbarkeitsbegriff ist auch bei der Kompaktheit in Bochner–Lebesgue-Räumen Vorsicht geboten:

Wir wissen zwar bereits, dass die folgende Implikation gilt:

$$X \hookrightarrow Y \qquad \Rightarrow \quad L^p(I;X) \hookrightarrow L^p(I;Y)\,.$$

Jedoch zeigt das folgende Beispiel, dass im Allgemeinen die folgende Implikation nicht gilt:

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \qquad \Rightarrow \quad L^p(I;X) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(I;Y)\,.$$

Beispiel 7.1 ($X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \not\Rightarrow L^p(I;X) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(I;Y)$)
Es gelte $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. Weiter sei $x \in X \setminus \{0\}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I)$ so, dass
(i) $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^p(I)$ $(n \to \infty)$;
(ii) $f_n \not\to 0$ in $L^p(I)$ $(n \to \infty)$.
(z. B. $I = (0, 2\pi)$ mit $f_n(t) := \sin(nt)$ für alle $t \in I$ und $n \in \mathbb{N}$).

Definiere dann $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} := (xf_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;X)$. Dann gilt:
(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} L^p(I;X)$ ist beschränkt;
(ii) $\|u_n\|_{L^p(I;Y)} = \|x\|_Y \|f_n\|_{L^p(I)} \not\to 0$ $(n \to \infty)$.
Mit anderen Worten: $L^p(I;X) \not\hookrightarrow\not\hookrightarrow L^p(I;Y)$.

Beispiel 7.1 zeigt, dass Kompaktheit im Bildbereich nicht ausreicht, um auch Kompaktheit in Bochner–Lebesgue-Räumen zu erhalten. Doch was fehlt? Wir wir in diesem Kapitel lernen werden –insbesondere durch den Satz von Aubin–Lions (*cf.* Satz 7.6)–, stellt die zusätzlich gleichmäßige Kontrolle über die verallgemeinerte Zeitableitung ein hinreichendes Kriterium für Kompaktheit in Bochner–Lebesgue-Räumen dar. Das ist im Wesentlichen ein Folge des Kompaktheitssatzes von Arzelà–Ascoli (*cf.* Satz 7.2).

7.1 Satz von Arzelà–Ascoli

Wie bereits erwähnt geht im Beweis des Satzes von Aubin-Lions der Satz von Arzelà–Ascoli ein. Wir zitieren ohne Beweis eine allgemeine Version des Satzes von Arzelà–Ascoli.

Satz 7.2 (von Arzelà–Ascoli)
Sei X ein Banach-Raum und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall.

Dann ist eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq C^0(\overline{I}; X)$ genau dann relativ kompakt (in $C^0(\overline{I}; X)$), wenn gilt:

- *$\mathcal{M}$ ist gleichgradig stetig, d.h. für alle $t_0 \in \overline{I}$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $t \in [t_0 - \delta, t + \delta]$ und alle $u \in \mathcal{M}$ gilt, dass*
$$\|u(t) - u(t_0)\|_X \le \varepsilon\,.$$
- *$\mathcal{M}$ ist punktweise relativ kompakt, d.h. für alle $t \in \overline{I}$ ist*
$$M(t) \coloneqq \{u(t) \in X \mid u \in M\}\,,$$
relativ kompakt (in X).

Die im Satz von Arzelà–Ascoli (*cf.* Satz 7.2) geforderte gleichgradige Stetigkeit erzwingt man am einfachsten, indem man gleichmäßige Kontrolle über die verallgemeinerte Zeitableitungen voraussetzt.

Bemerkung 7.3 (Hinreichendes Kriterium für gleichgradige Stetigkeit)
Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (cf. Satz 4.14) und der Hölder'schen Ungleichung (cf. Satz 2.3) gilt für alle $u \in W^{1,p}(I; X)$, wobei $p \in (1, \infty]$, und $t, t_0 \in \overline{I}$, dass
$$\begin{aligned}
\|u_c(t) - u_c(t_0)\|_X &= \left\| \int_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(s)\,\mathrm{d}s \right\|_X \\
&\le \int_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} \left\| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(s) \right\|_X \mathrm{d}s \\
&\le |t - t_0|^{\frac{1}{p'}} \left\| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \right\|_{L^p(I;X)}\,.
\end{aligned}$$
Ist nun $\mathcal{M} \subseteq W^{1,p}(I; X)$, wobei $p \in (1, \infty]$, so, dass
$$c_{\mathcal{M}} \coloneqq \sup_{u \in \mathcal{M}} \left\| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \right\|_{L^p(I;X)} < \infty\,,$$
dann gilt für alle $t, t_0 \in \overline{I}$, dass
$$\|u_c(t) - u_c(t_0)\|_X \le c_{\mathcal{M}} |t - t_0|^{\frac{1}{p'}}\,.$$
Mit anderen Worten: die Teilmenge $(M)_c \subseteq C^0(\overline{I}; X)$ ist gleichgradig stetig.

7.2 Das Ehrling-Lemma

Im Satz von Aubin–Lions (*cf.* Satz 7.2) wird an entscheidender Stelle ein Interpolationsresultat benutzt, was unter dem Namen Ehrling–Lemma bekannt ist und dem wir uns zunächst zuwenden wollen.

Lemma 7.4 (Ehrling)
Seien B_0, B und B_1 Banach-Rräume, sodass

$$B_0 \overset{e_0}{\hookrightarrow\hookrightarrow} B \overset{e_1}{\hookrightarrow} B_1,$$

Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon > 0$, sodass für alle $u \in B_0$ gilt, dass

$$\|e_0 u\|_B \leq \varepsilon \|u\|_{B_0} + c_\varepsilon \|e_1 e_0 u\|_{B_1} . \tag{7.5}$$

Beweis. Wäre (7.5) falsch, so würde ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_0$ existieren, sodass

$$\|e_0 \tilde{u}_n\|_B > \varepsilon_0 \|\tilde{u}_n\|_{B_0} + n \|e_1 e_0 \tilde{u}_n\|_{B_1} .$$

Setzen wir $u_n := \tilde{u}_n \|\tilde{u}_n\|_{B_0}^{-1} \in B_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt:
(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_0$ ist beschränkt;
(ii) $\|e_0 u_n\|_B > \varepsilon_0 \|u_n\|_{B_0} + n \|e_1 e_0 u_n\|_{B_1} = \varepsilon_0 + n \|e_1 e_0 u_n\|_{B_1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Wegen (i) und der Kompaktheit der Einbettung $e_0 \colon B_0 \to B$ existiert ein $u \in B$ und eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, sodass

$$e_0 u_{n_k} \to u \quad \text{in } B \quad (k \to \infty) .$$

Wegen der Stetigkeit der Einbettung $e_1 \colon B \to B_1$ folger wir, dass

$$e_1 e_0 u_{n_k} \to e_1 u \quad \text{in } B_1 \quad (k \to \infty) .$$

Aus (ii) folgt weiter, dass

$$\|e_1 e_0 u_{n_k}\|_{B_1} = \frac{\|e_0 \tilde{u}_{n_k}\|_B}{n_k} \to 0 \quad (k \to \infty) ,$$

d.h. $e_1 e_0 u_{n_k} \to 0$ $(k \to \infty)$. Die Eindeutigkeit des Grenzwerts liefert dann, dass $e_1 u = 0$ in B_1 und wegen der Injektivität von $e_1 \colon B \to B_1$, dass $u = 0$ in B. Schließlich folgt mit (ii), dass

$$0 < \varepsilon_0 < \|e_0 u_{n_k}\|_B \to 0 \quad (k \to \infty) .$$

Dieser Widerspruch liefert nun die Gültigkeit der Abschätzung (7.5). $\square$

7.3 Satz von Aubin–Lions

Das Ehrling-Lemma (*cf.* Lemma 7.4) liefert den noch fehlenden Baustein für den Satz von Aubin-Lions. Der Beweis folgt der Darstellung von [BF13], die sich wiederum an der Methode von Simon orientiert, der in [Sim87] eine ganze Reihe von Kompaktheitssätzen à la Aubin-Lions bewiesen hat. Die Tatsache, dass [Sim87] zu den meist zitierten Arbeiten gehört, unterstreicht noch einmal die Relevanz von Kompaktheitssätzen für die Theorie aber auch für die theoretische Numerik im Kontext nicht-linearer Evolutionsgleichungen.

Satz 7.6 (von Aubin–Lions)
Seien B_0, B und B_1 Banach-Räume, welche die Voraussetzungen des Ehrling-Lemmas (cf. Lemma 7.4) erfüllen, $p \in [1,\infty)$, $r \in [1,\infty]$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall.

Dann gilt die kompakte Einbettung

$$W^{1,p,r}_{e_1 \circ e_0}(I; B_0, B_1) \overset{e_0}{\hookrightarrow\hookrightarrow} L^p(I,B)\,.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $B_0 \subseteq B \subseteq B_1$, $e_0 = \mathrm{id}_{B_0}$, $e_1 = \mathrm{id}_B$ und $I = (0,T)$, $0 < T < \infty$.

Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p,r}(I; B_0, B_1)$ eine beschränkte Folge. Dann haben wir, dass folgende Ziel:
<u>*Ziel:*</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine $L^p(I;B)$-Cauchy-Folge.
Wir gehen in drei Hauptschritten vor:
<u>*1. Schritt:*</u> Reduktion auf Kompaktheit in $L^p(I;B_1)$ (mit Ehrling-Lemma (*cf.* Lemma 7.4));
<u>*2. Schritt:*</u> Kompaktheitsargument mit Satz von Arzelá–Ascoli (*cf.* Satz 7.6);
<u>*3. Schritt:*</u> Diagonalfolgenargument.
<u>*1. Schritt:*</u> *(Reduktion auf Kompaktheit in $L^p(I;B_1)$ (mit Ehrling-Lemma (cf. Lemma 7.4)))*

Wegen des Ehrling-Lemmas (*cf.* Lemma 7.4) existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon > 0$, sodass für alle $n,k \in \mathbb{N}$ und f.a. $t \in I$, dass

$$\|u_n(t) - u_k(t)\|_B \le \varepsilon\,\|u_n(t) - u_k(t)\|_{B_0} + c_\varepsilon\,\|u_n(t) - u_k(t)\|_{B_1}\,.$$

Mit Hilfe der Abschätzung $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ für alle $a,b \ge 0$ folgt für alle $n,k \in \mathbb{N}$, dass

$$\|u_n - u_k\|^p_{L^p(I;B)} \le 2^{p-1}\left(\varepsilon^p\,\|u_n - u_k\|^p_{L^p(I;B_0)} + c^p_\varepsilon\,\|u_n - u_k\|^p_{L^p(I;B_1)}\right).$$

Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I;B_0)$ beschränkt ist, reicht es das folgende Ziel zu erreichen:
<u>*Ziel:*</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge.
<u>*2. Schritt:*</u> *(Kompaktheitsargument mit Satz von Arzelá–Ascoli (cf. Satz 7.6))*

Sei weiter $\kappa \in C^\infty(\bar{I})$ eine feste Abschneidefunktion mit $\kappa(T) = 0$ und $\kappa(0) = 1$.
Dann gilt:

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\kappa u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p,r}((0,+\infty); B_0, B_1)$ ist beschränkt;
- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1-\kappa)u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p,r}((-\infty,T); B_0, B_1)$ ist beschränkt;
- $u_n = v_n + w_n$ in $W^{1,p,r}(I; B_0, B_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Um zu zeigen, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge hat, reicht es das folgende Ziel zu erreichen:

Ziel: $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthalten eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge.

Zu $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für alle $t,h>0$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt, dass

$$\left.\begin{aligned} v_n(t) &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} v_n(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} v_n(t) - v_n(s)\,\mathrm{d}s \\ &=: a_{n,h}(t) + b_{n,h}(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{in } B_0\,.$$

Als nächstes zeigen wir das Folgende:

(a) $(a_{n,h})_{n\in\mathbb{N}}$ enthält für alle $h>0$ eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge;

(b) $\|b_{n,h}\|_{L^p(I;B_1)} \le c\, h^{\frac{1}{p}}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $h>0$.

Zu (a). Wir zeigen nun, dass die Menge $\{a_{n,h}(t)\mid n\in\mathbb{N}\}$ für jedes feste $h>0$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà–Ascoli (*cf.* Satz 7.2) erfüllt:

1. Punktweise relative Kompaktheit: Für alle $t\in\overline{I}$, $n\in\mathbb{N}$ und $h>0$ gilt, dass

$$\|a_{n,h}(t)\|_{B_0} \le h^{\frac{1}{p'}-1}\|v_n\|_{L^p(I;B_0)}\,,$$

d.h. $\{a_{n,h}(t)\mid n\in\mathbb{N}\}$ ist für alle $t\in\overline{I}$ und $h>0$ in B_0 beschränkt. Wegen $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ ist $\{a_{n,h}(t)\mid n\in\mathbb{N}\}$ für alle $t\in\overline{I}$ und $h>0$ in B_1 relativ kompakt.

2. Gleichgradige Stetigkeit: Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (*cf.* Satz 4.14) erhalten für alle $t,h>0$ und $n\in\mathbb{N}$, dass

$$\frac{a_{n,h}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{h}(v_n(t+h)-v_n(t)) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{in } B_1\,.$$

Daraus folgt wegen der Beschränktheit von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p,r}(I;B_0,B_1)$, für alle $h>0$ und $n\in\mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\mathrm{d}a_{n,h}}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^p(I;B_1)} &\le \frac{1}{h}\bigg(\int_I\int_t^{t+h}\left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}(s)\right\|_{B_1}^p\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\bigg)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \frac{T^{\frac{1}{p}}}{h}\left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^p(I;B_1)} \le \frac{c}{h}\,. \end{aligned}$$

was laut Bemerkung 7.3 für alle $h>0$ die gleichgradige Stetigkeit von $\{a_{n,h}(t)\mid n\in\mathbb{N}\}$ liefert.

Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli (*cf.* Satz 7.2) enthält $(a_{n,h})_{n\in\mathbb{N}}$ somit eine $C^0(\bar{I},B_1)$-Cauchy-Folge. Wegen der Einbettung $C^0(\bar{I},B_1)\hookrightarrow L^p(I;B_1)$ und dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz ist diese Cauchyfolge auch eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge.

Zu (b). Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (*cf.* Satz 4.14) erhalten für alle $t, h > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}\|b_{n,h}(t)\|_{B_1} &\le \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|v_n(t) - v_n(s)\|_{B_1}\,\mathrm{d}s \\ &\le \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_t^s \left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}(\tau)\right\|_{B_1}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Wir erhalten daher weiter für alle $t \in I$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}\int_I \|b_{n,h}(t)\|_{B_1}^p\,\mathrm{d}t &\overset{(1)}{\le} \int_T \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(\int_t^s \left\|\frac{dv_n}{dt}(\tau)\right\|_{B_1}\mathrm{d}\tau\right)^p\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(2)}{\le} \left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^1(I;B_1)}^{p-1}\int_I \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_t^s \left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}(\tau)\right\|_{B_1}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(3)}{=} \left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^1(I;B_1)}^{p-1}\int_I \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}(\tau)\right\|_{B_1}(t+h-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(4)}{\le} \left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^1(I;B_1)}^{p-1}\int_I \int_t^{t+h} \left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}(\tau)\right\|_{B_1}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(5)}{\le} h\left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^1(I;B_1)}^{p} \\ &\le c\,h\,.\end{aligned}$$

Dabei verwenden wir in (1) die Jensensche Ungleichung, (2), dass

$$\left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^1((t,s);B_1)} \le \left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^1((t,s);B_1)}^{\frac{1}{p'}}\left\|\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^1((t,s);B_1)}^{\frac{1}{p}},$$

in (3), dass

$$\chi_{(t,t+h)}(s)\cdot\chi_{(t,s)}(\tau) = \chi_{(t,t+h)}(\tau)\cdot\chi_{(\tau,t+h)}(s)\,,$$

zusammen mit dem Satz von Fubin, in (4), dass $t + h - \tau \le h$, und in (5), dass wir wegen $v_n(\tau) = 0$ für alle $\tau \ge T$ ohne Einschränkung $\tau \le T$ annehmen können und deshalb

$$\chi_{(0,T)}(t)\cdot\chi_{(t,t+h)}(\tau) \le \chi_{(0,T)}(\tau)\cdot\chi_{(\tau-h,\tau)}(t)\,,$$

zusammen mit dem Satz von Fubini.

Damit folgt dann die behauptete Abschätzung

$$\|b_{n,h}\|_{L^p(I;B_1)} \le c\,h^{\frac{1}{p}}\,. \tag{7.7}$$

Zu $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. folgt analog zu $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Schritt: (Diagonalfolgenargument):

Wir definieren die Nullfolge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,+\infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ durch $h_k := \frac{1}{k}$.

Für $k = 1$: Da $(a_{n,h_1})_{n\in\mathbb{N}}$ nach Schritt 2(a) eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge enthält, existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_\ell^1,h_1})_{\ell\in\mathbb{N}}$, wobei $(n_\ell^1)_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$.

Für $k = 2$: Da $(a_{n_\ell^1,h_2})_{\ell\in\mathbb{N}}$ nach Schritt 2(a) eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge enthält, existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_\ell^2,h_2})_{\ell\in\mathbb{N}}$, wobei $(n_\ell^2)_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq (n_\ell^1)_{\ell\in\mathbb{N}}$.

Für $k \in \mathbb{N}$: Induktion liefert, dass für alle $k \in \mathbb{N}$, eine in $L^p(I;B_1)$ konvergente Teilfolge $(a_{n_\ell^k,h_2})_{\ell\in\mathbb{N}}$ existiert, wobei $(n_\ell^k)_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq (n_\ell^{k-1})_{\ell\in\mathbb{N}}$.

Wir definieren dann die Diagonalfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ durch $n_k := n_k^k$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Dann existiert nach Schritt 2(b) ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt, dass

$$\|b_{n_k,h_k}\|_{L^p(I;B_1)} \leq c\, h_k^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\,.$$

Da $(a_{n_\ell^{k_0},h_{k_0}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine $L^p(I;B_0)$-Cauchy-Folge ist, existiert ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\ell,\ell' \in \mathbb{N}$ mit $\ell,\ell' \geq \ell_0$ gilt, dass

$$\|a_{n_\ell^{k_0},h_{k_0}} - a_{n_{\ell'}^{k_0},h_{k_0}}\|_{L^p(I;B_1)} \leq \varepsilon\,.$$

Setze $k_1 := \max\{\ell_0, k_0\} \in \mathbb{N}$. Wegen $(a_{n_k,h_k})_{k\in\mathbb{N};k\geq k_1} \subseteq (a_{n_\ell^{k_0},h_{k_0}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ gilt für alle $k,k' \in \mathbb{N}$ mit $k,k' \geq k_1$, dass

$$\|a_{n_k,h_k} - a_{n_{k'},h_{k'}}\|_{L^p(I;B_1)} \leq \varepsilon\,.$$

Wir erhalten schießlich, dass

$$\begin{aligned}\|v_{n_k} - v_{n_{k'}}\|_{L^p(I;B_1)} &\leq \|a_{n_k,h_k} - a_{n_{k'},h_{k'}}\|_{L^p(I;B_1)} \\ &\quad + \|b_{n_k,h_k}\|_{L^p(I;B_1)} + \|b_{n_{k'},h_{k'}}\|_{L^p(I;B_1)} \\ &\leq 3\varepsilon\,,\end{aligned}$$

d.h. $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge. Analog zeigt man, dass $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge enthält. Schließlich folgern wir mit Schritt 2, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $L^p(I;B_1)$-Cauchy-Folge enthält. Schritt 1 liefert dann, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $L^p(I;B)$-Cauchy-Folge enthält und damit die Behauptung. $\square$

Literaturverzeichnis

[BF13] Franck Boyer and Pierre Fabrie, *Mathematical tools for the study of the incompressible navier-stokes equations and related models*, Applied mathematical sciences, vol. 183, Springer, New York; Heidelberg; London [u.a.], 2013 (eng).

[Bog07] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. I and II*, Berlin: Springer, 2007 (English).

[Bré73] Haïm Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Math. Stud., vol. 5, Elsevier, Amsterdam, 1973 (French).

[Bré11] Haïm Brézis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Mathematics, Springer, New York; Heidelberg [u.a.], 2011 (eng).

[BT38] Salomon Bochner and A. E. Taylor, *Linear functionals on certain spaces of abstractly valued functions*, Ann. Math. (2) **39** (1938), 913–944 (English).

[DHHR11] Lars Diening, Petteri Harjulehto, Peter Hästö, and Michael Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011. MR 2790542

[Edw65] R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, 1965 (English).

[Els09] Jürgen Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, 6. ed., Springer-Lehrbuch, Grundwissen Mathematik, Springer, Berlin; Heidelberg [u.a.], 2009 (ger).

[Emm04] Etienne Emmrich, *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen. Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende*, Wiesbaden: Vieweg, 2004 (German).

[GGZ74] Herbert Gajewski, Konrad Gröger, and Klaus Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Mathematische Lehrbücher und Monographien /2, vol. 38, Akad.-Verl., Berlin, 1974 (ger).

[Hal80] Jack K. Hale, *Ordinary differential equations. 2nd ed*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 21. Orig. publ. by Wiley-Interscience. Huntington, New York: Robert E. Krieger Publishing Company. XVII, 361 p. $ 27.50 (1980)., 1980.

[Kal23] Alex Kaltenbach, *Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents*, Lect. Notes Math., vol. 2329, Cham: Springer, 2023 (English).

[LM87] Rüdiger Landes and Vesa Mustonen, *A strongly nonlinear parabolic initial-boundary value problem.*, *Ark. Mat.* **25** (1987), 29–40 (eng).

[Pet38] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Am. Math. Soc. **44** (1938), 277–304 (English).

[Rou05] Tomas Roubíček, *Nonlinear partial differential equations with applications*, Birkhäuser, Basel, 2005.

[Sim87] Jacques Simon, *Compact sets in the space* $L^p(I, B)$, Ann. Math. Pure Appl **146** (1987), 65–96 (eng).

[Zei90] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A*, Springer, New York, 1990, Linear monotone operators.

[Zei93] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. Volume I: Fixed-point theorems. Translated from the German by Peter R. Wadsack.*, 2. corr. printing ed., New York: Springer-Verlag, 1993 (English).