

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Abteilung für Angewandte Mathematik

Verallgemeinerte nichtlineare Evolutionsgleichungen

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
„Master of Science“

Vorgelegt von

Alex Kaltenbach

Betreut von
Prof. Dr. Michael Růžička

Freiburg, 18. Mai 2019
(korrigierte Version)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

Notation 7

1 Stetigkeits- und Wachstumsbegriffe 9

2 Schnitte von Banachräumen 11

3 Funktionen mit Werten in Banachräumen 21

4 Distributionelle Zeitableitung 31

5 Verallgemeinerte Evolutionsgleichungen 35

6 Existenzsatz mit separablem V 41

7 Existenzsatz mit nichtseparablem V 53

8 Verallg. Prä-Evolutionsgleichungen 61

9 Existenzsatz für Operatorfamilien 67

10 Existenzsatz mit schlechter Ableitung 77

11 Appendix 81

Literatur 85

Erklärung 87

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist die Formulierung und der Beweis einer direkten Verallgemeinerung des Hauptsatzes über pseudomonotone Operatoren auf ein instationäres Analogon. Der Hauptsatz über pseudomonotone Operatoren umfasst folgende Aussage.

Satz 0.1: (Hauptsatz über pseudomonotone Operatoren, [Růž04, Satz 3.59]) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum. Der Operator $A : X \to X^*$ sei pseudomonoton, beschränkt und koerziv (cf. Kapitel 1). Dann gilt $R(A) = X^*$.

Unter einem instationären Analogon versteht man dabei, dass bei Evolutionstripel-Struktur (V, H, j), das heißt V ist ein Banachraum, Hilbertraum H und $j : V \to H$ eine dichte Einbettung, $1 < p < \infty$, $0 < T < \infty$, $I := (0, T)$ und einem geeigneten Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I, V) \to L^{p'}(I, V^*)$ zu beliebigem Anfangswert $\boldsymbol{y}_0 \in H$ und rechter Seite $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(I, V^*)$ ein $\boldsymbol{y} \in W_e^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ existiert, sodass

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{f} \text{ in } L^{p'}(I, V^*), \\ j(\boldsymbol{y}(0)) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Dabei bezeichnet $\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} \in L^{p'}(I, V^*)$ die distributionelle Zeitableitung (cf. Lemma 5.4) und die Wohldefiniertheit der Punktauswertung wird noch geklärt (cf. Satz 5.5 (iii)).

Von besonderem Interesse sind Operatoren $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I, V) \to L^{p'}(I, V^*)$, die durch eine Operatorfamilie $\{A(t)\}_{t\in I}$ induziert sind, das heißt durch die Vorschrift $(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v})(t) := A(t)(\boldsymbol{v}(t))$ definiert. Für diese tritt die angestrebte Verallgemeinerung in der Literatur am häufigsten mit der Einschränkung auf, dass man nur Familien monotoner, demistetiger Operatoren betrachtet. So gilt beispielsweise das folgende Resultat, das in dieser Arbeit in Satz 9.5 bewiesen wird.

Satz 0.2: (Instationärer Hauptsatz über monotone Operatorfamilien) Sei (V, H, j) Evolutionstripel, V reflexiv, $1 < p < \infty$, $0 < T < \infty$, $I := (0, T)$ und $\{A(t)\}_{t\in I}$ eine Operatorfamilie, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $A(\cdot)v : I \to V^*$ ist für alle $v \in V$ Bochner-messbar und $A(t) : V \to V^*$ ist für fast alle $t \in I$ monoton und demistetig.

(ii) $\|A(t)v\|_{V^*} \leq \alpha(t) + \beta\|v\|_V^{p-1}$ für fast alle $t \in I$ und alle $v \in V$, wobei $\alpha \in L^{p'}(I)$ und $\beta > 0$.

(iii) $\langle A(t)v, v\rangle_V \geq M\|v\|_V^p - \lambda(t)$ für fast alle $t \in I$ und alle $v \in V$, wobei $\lambda \in L^1(I)$ und $M > 0$.

Sei $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I, V) \to L^{p'}(I, V^*)$ definiert durch $(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v})(t) := A(t)(\boldsymbol{v}(t))$. Dann existiert zu jedem $\boldsymbol{y}_0 \in H$ und $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(I, V^*)$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{y} \in W_e^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ von ($*$).

In den üblichen Beweisen dieses Satzes geht ein, dass die beschriebene Familie monotoner, demistetiger Operatoren $\{A(t)\}_{t\in I}$ mit der Vorschrift $(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v})(t) := A(t)(\boldsymbol{v}(t))$ einen monotonen, demistetigen und damit pseudomonotonen Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$ induziert. Absicht dieser Arbeit ist, die Einschränkung der Monotonie aufzuheben. Man betrachtet daher wieder eine Operatorfamilie $\{A(t)\}_{t\in I}$ wie in Satz 0.2, ersetzt jedoch in Punkt (i) Monotonie und Demistetigkeit durch Pseudomonotonie. Hauptschwierigkeit ist nun, dass sich im Gegensatz zur Monotonie und Demistetigkeit bloße Pseudomonotonie der Operatorfamilie $\{A(t)\}_{t\in I}$ nicht in Pseudomonotonie des durch $(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v})(t) := A(t)(\boldsymbol{v}(t))$ induzierten Operators $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$ vererbt. Ursache dafür ist, dass für eine Folge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,V)$ und ein $\boldsymbol{y} \in L^p(I,V)$ aus

$$\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } L^p(I,V) \text{ und } \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\rangle_{L^p(I,V)} \leq 0$$

im Allgemeinen nicht folgt, dass

$$\boldsymbol{y}_n(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}(t) \text{ in } V \text{ und } \limsup_{n\to\infty} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \leq 0$$

für fast alle $t \in I$, was essenziell wäre, um sich an der punktweisen Pseudomonotonie der Operatorfamilie zu bedienen. In dieser Arbeit löst man dieses Problem wie folgt. Fordert man zusätzlich, dass $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ und $\boldsymbol{y} \in L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ mit

$$\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } C^0(\overline{I},H).$$

Dann folgt, dass eine Teilfolge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\Lambda} \subseteq L^p(I,V)\cap C^0(\overline{I},H)$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\boldsymbol{y}_n(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}(t) \text{ in } V \ (n \in \Lambda) \text{ und } \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \leq 0$$

für fast alle $t \in I$. Nun ist man in der Lage, die punktweise Pseudomonotonie der Operatorfamilie auszunutzen und kann insgesamt zeigen, dass der Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H) \to L^{p'}(I,V^*)$ verallgemeinert pseudomonoton ist. Das soll heißen, dass für eine Folge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ und ein $\boldsymbol{y} \in L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ aus

$$\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H) \text{ und } \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\rangle_{L^p(I,V)} \leq 0$$

folgt, dass

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\rangle_{L^p(I,V)} \leq \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{v}\rangle_{L^p(I,V)}$$

für alle $\boldsymbol{v} \in L^p(I,V)$ und $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}$ in $L^{p'}(I,V^*)$. Das ist sehr angenehm, da $L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ der natürliche Energieraum ist, für den man a-priori Abschätzungen ohne zusätzliche Forderungen an die Räume und Operatoren erhält. Zwar liefern gleichmäßige a-priori Abschätzungen aufgrund fehlender Reflexivität des Raums

$L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ nicht direkt eine schwach konvergente Teilfolge, jedoch wird sich zeigen, dass schwache Konvergenz von Galerkin-Lösungen in diesem Raum natürlich ist und immer gezeigt werden kann. Der Ansatz ist daher nicht einen pseudomonotonen Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$, sondern einen verallgemeinert pseudomonotonen Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H) \to L^{p'}(I,V^*)$ zu induzieren.

Für den Fall eines beschränkten, pseudomonotonen und koerziven Operators $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$, der durch einen Operator $A : V \to V^*$ induziert ist, also von der Form

$$(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v})(t) = A(\boldsymbol{v}(t)) \text{ in } V^* \text{ für fast alle } t \in I \text{ und } \boldsymbol{v} \in L^p(I,V)$$

ist in [Růž16, Kapitel 3, Satz 2.50] ein Existenzbeweis mit Galerkin-Ansatz zu finden. Die Existenz der Galerkin-Lösungen folgt dort mit dem Satz von Peano (cf. [Růž04, Kapitel 1, Satz 2.55]). Die Pseudomonotonie von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$ wird dabei allerdings gefordert und nicht von $A : V \to V^*$ vererbt, wodurch dort die obige Problemstellung ausgeklammert wird.

In [Ro05, Chapter 8, Theorem 8.27] wird ein Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$ betrachtet, der durch eine Familie pseudomonotoner Operatoren $\{A(t)\}_{t\in I}$ induziert ist, also von der Form

$$(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v})(t) = A(t)(\boldsymbol{v}(t)) \text{ in } V^* \text{ für fast alle } t \in I \text{ und } \boldsymbol{v} \in L^p(I,V).$$

Aufgrund fehlender Stetigkeit in der Zeit ist hier für die Existenz der Galerkin-Lösungen der Satz von Caratheodory notwendig (cf. Satz A.18). Hier wird Pseudomonotonie von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$ nicht vorausgesetzt, sondern wie gewünscht auf die Pseudomonotonie der Operatorfamilie $\{A(t)\}_{t\in I}$ zurückgegriffen.

Die Argumente dieser Arbeit unterscheiden sich jedoch teilweise von [Ro05]. Insbesondere liefert diese Arbeit das gewünschte Resultat für nur reflexives V und verallgemeinert zusätzlich die stets notwendige Evolutionstripel-Struktur auf den Begriff des Prä-Evolutionstripels, also wenn nicht mehr V, sondern nur $V \cap H$ dicht in H einbettet, was gerade in der Anwendung einen gewissen Spielraum sichert.

Motiviert durch die Betrachtung von verallgemeinert pseudomonotonen Operatoren $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H) \to L^{p'}(I,V^*)$, stellt sich weiter die Frage, welche Existenzaussagen noch möglich sind, falls der betrachtete Operator nicht induziert ist, das heißt nicht durch eine Operatorfamilie $\{A(t)\}_{t\in I}$ darstellbar. In [GGZ74, Kap. VI, Satz 1.1] ist ein Existenzsatz für einen nicht induzierten, monotonen, demistetigen und koerziven Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \cap L^q(I,H) \to L^{p'}(I,V^*) + L^{q'}(I,H^*)$ bewiesen, der

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \text{ in } V \text{ auf } [0,t] \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{w} \text{ in } V^* \text{ auf } [0,t] \qquad (**)$$

erfüllt. Für die Existenz der Galerkinlösungen dient hier eine Verallgemeinerung des

Satzes von Caratheodory [GGZ74, Kap. VI, Lemma 1.3]. Entsprechend betrachtet auch diese Arbeit Operatoren $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \cap C^0(\bar{I},H) \to L^{p'}(I,V^*) + L^{q'}(I,H^*)$, die in erster Linie durch den Energieraum $L^p(I,V) \cap C^0(\bar{I},H)$ motiviert sind und deren Gestalt mehr der Form $A : X \to X^*$ wie im Hauptsatz über pseudomonotone Operatoren entspricht.

Hauptschwierigkeit bei nicht induzierten Operatoren ist, die Existenz von Galerkin-Lösungen zu sichern. Jeder der oben beschriebenen Existenzbeweise verwendet für die Existenz der Galerkin-Lösungen, wenn auch implizit, dasselbe Vorgehen aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Man bedient sich des üblichen Fixpunktarguments, das auf einer zur Operatordifferentialgleichung äquivalenten Integraldarstellung, dem Satz von Arzela-Ascoli und einer Version des Fixpunktsatzes von Schauder beruht. Um die im Fixpunktsatz von Schauder geforderte Selbstabbildungseigenschaft zu erfüllen, wird in der Regel nur die Existenz von Kurzzeitlösungen gezeigt und dann mit Hilfe des üblichen Fortsetzungsarguments und a-priori Abschätzungen eine globale Lösung konstruiert. Um dieses Fortsetzungsargument anwenden zu können, muss der behandelte Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ zumindest die Eigenschaft (∗∗) besitzen. In dieser Arbeit muss daher direkt die globale Existenz der Galerkin-Lösungen gezeigt werden. Das Vorgehen beruht dann im Wesentlichen auf geeignetem Stauchen des untersuchten Fixpunktoperators, also Erzwingen der Selbstabbildungseigenschaft.

Ein bekanntes Resultat, das ebenfalls ohne Separabilität von V und mit nicht induzierten Operatoren auskommt, geht auf Felix E. Browder zurück.

Satz 0.3: (Instationärer Hauptsatz über pseudomonotone Operatoren, [Růž04, Satz 3.66]) Sei (V,H,j) Evolutionstripel, V reflexiv, $1 < p < \infty$, $0 < T < \infty$ und $I := (0,T)$. Des Weiteren sei $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$ pseudomonoton, beschränkt und koerziv. Dann existiert zu beliebigem $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(I,V^*)$ ein $\boldsymbol{y} \in W_e^{1,p,p'}(I,V,V^*)$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{f} \text{ in } L^{p'}(I,V^*), \\ j(\boldsymbol{y}(0)) &= 0 \text{ in } H. \end{aligned}$$

Die Schwäche dieses Resultats liegt darin, dass der betrachtete Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$ nicht wie gewünscht verallgemeinert pseudomonoton ist, sondern sogar pseudomonoton, was eine stärkere Forderung ist. Dies hat seinen Ursprung in der betrachteten Wachstumsbedingung und dem Nichtausnutzen der zusätzlichen Struktur, die ein instationäres Problem im Vergleich zu einem stationären liefert. Gemeint ist die geltende partielle Integrationsformel, die einerseits gleichmäßige a-priori Abschätzungen in $C^0(\bar{I},H)$ sichert, andererseits den Zugang ebnet, die Bedingung (M) ins Spiel bringen zu können. Diese Arbeit nutzt diese Struktur, indem eine spezielle Bedingung eingeführt wird, welche die üblichen Wachstumsbegriffe verallgemeinert und gleichzeitig leicht handhabbar ist, die sogenannte Bedingung (K). Letztere sichert die notwendigen a-priori Abschätzungen für eine große Klasse von Operatoren, die es letztendlich ermög-

lichen Operatoren $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H) \to L^{p'}(I,V^*) + L^{q'}(I,H^*)$ zu betrachten, die einer sogenannten verallgemeinerten Bedingung (M) genügen, das soll heißen, dass für eine Folge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ und ein $\boldsymbol{y} \in L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ aus

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H), \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\xi} \text{ in } L^{p'}(I,V^*) + L^{q'}(I,H^*) \\ \text{und } \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n \rangle_{L^p(I,V)\cap L^q(I,H)} &\leq \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y} \rangle_{L^p(I,V)\cap L^q(I,H)}. \end{aligned}$$

folgt, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}$ in $L^{p'}(I,V^*) + L^{q'}(I,H^*)$. Bei dieser Bedingung handelt es sich um eine Verallgemeinerung der verallgemeinerten Pseudomonotonie und der üblichen Bedingung (M). Dabei wird Letztere im Hauptsatz über pseudomonotone Operatoren häufig an Stelle der Pseudomonotonie gefordert. Die Betrachtung der verallgemeinerten Bedingung (M) widerspricht also nicht dem Ziel dieser Arbeit, eine instationäre Verallgemeinerung des Hauptsatz über pseudomonotone Operatoren zu beweisen.

In Kapitel 1 werden die wichtigsten Definitionen und Resultate aus der Theorie monotoner Operatoren aufgeführt. Kapitel 2 geht der Frage nach, wie ein Schnitt zwischen Banachräumen definiert werden kann, die sich algebraisch in unterschiedlichen Mengen befinden. Beispielsweise ist der algebraische Schnitt $L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ im Allgemeinen leer, wird allerdings in geeigneter Definition in dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielen. Kapitel 3 widmet sich den betrachteten Banachraum-wertigen Funktionenräumen und ihren Schnitten gemäß dem vorherigen Kapitel. In Kapitel 4 wird die distributionelle Zeitableitung eingeführt. Dabei wird nicht wie in [GGZ74, Kap. V] der Zugang über den allgemeinen Begriff der vektor-wertigen Distribution gewählt, sondern der Begriff der distributionellen Zeitableitung in Analogie zur schwachen Ableitung reellwertiger Funktionen definiert. In Kapitel 5 wird der Begriff des Evolutionstripels untersucht und die Grundlage für die ordnungsgemäße Einführung verallgemeinerter nichtlinearer Evolutionsgleichungen geschaffen. In Kapitel 6 wird zunächst das allgemeine Schema des verwendeten Galerkin-Ansatzes vermittelt, welches anschließend im Beweis eines Existenzsatzes für den Fall eines separablen Bildbereichs V und nicht induzierten Operators $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H) \to L^{p'}(I,V^*) + L^{q'}(I,H^*)$ Verwendung findet. Dessen Resultate werden in Kapitel 7 wiederum auf den Fall eines nur reflexiven Bildbereichs V verallgemeinert. In Kapitel 8 wird das Prä-Evolutionstripel eingeführt und ein entsprechender Existenzsatz bewiesen. Kapitel 9 widmet sich einem Existenzsatz für Operatorfamilien und dabei vor allem hinreichenden Bedingungen an diese Operatorfamilien, sodass die induzierten Operatoren den Voraussetzungen der Existenzsätze aus Kapitel 6 bis 8 genügen. Kapitel 10 stellt sich schließlich der Frage, welche Existenzaussagen noch möglich sind, wenn die Regularität der Lösung nicht mehr ausreicht, um die verallgemeinerte partielle Integrationsformel zu erfüllen.

Notation

Diese Arbeit orientiert sich wesentlich an folgender Notation:

$v, u, x, y, z, ...$	Elemente aus Banachräumen,
$x^*, y^*, z^*, ...$	lineare, stetige Funktionale,
$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ...$	Banachraum-wertige Funktionen,
φ	Funktion aus $C_0^\infty(I)$ oder $C^\infty(\overline{I})$,
$A_0, B, A, ...$	Operatoren zwischen allgemeinen Banachräumen,
$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, ...$	Operatoren zwischen Räumen Banachraum-wertiger Funktionen,
$X, Y, Z, ...$	allgemeine Banachräume,
$X^*, Y^*, Z^*, ...$	Dualräume,
(X, Y)	kompatibles Paar, siehe Definition 2.2,
$X \cap_j Y$	X-Schnitt von X und Y bezüglich j, siehe Definition 2.3,
j	allgemeine Einbettung $j : X \to Y$, siehe Definition 2.1, oder Schnitteinbettung $j : X \cap_j Y \to Y$ zu kompatiblem Paar, siehe Definition 2.3,
$X^* +_{j^*} Y^*$	Dualraum von $X \cap_j Y$, siehe Satz 2.8,
$A_{(j_X, j_Y)}$	Einschränkung von $A : X \cap_j Y \to X^*$ auf $X_0 \cap_{j_0} Y_0$, siehe Lemma 2.17,
V	Banachraum in (Prä-)Evolutionstripel-Struktur,
H	Hilbertraum,
(V, H, j)	Evolutionstripel oder Prä-Evolutionstripel, siehe Definition 5.1 oder 8.1,
e	kanonische Einbettung zu Evolutionstripel (V, H, j), siehe Lemma 5.2,
$e_{\mathscr{I}}$	kanonische Injektion zu Prä-Evolutionstripel (V, H, j), siehe Bemerkung 8.2,
p, q	Integrabilitätsexponenten $p, q \in [1, \infty]$,
p'	zu $p \in [1, \infty]$ konjugierter Exponent $p' \in [1, \infty]$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,
$C^\infty(\overline{I})$	Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen,
$C_0^\infty(I)$	Raum der Testfunktionen mit kompakt in I enthaltenem Träger,
$C^0(\overline{I}, X)$	Raum der auf $\overline{I}$ stetigen Funktionen mit Werten in X,
$C^k(\overline{I}, X)$	Raum der auf $\overline{I}$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X,
$\mathcal{S}(I, X)$	Menge der einfachen Funktionen auf I mit Werten in X,
$L^p(I, X)$	Bochner-Lebesgue-Raum, siehe Definition 3.8,
$W_j^{1,p,q}(I, X, Y)$	Bochner-Sobolev-Raum bezüglich Einbettung j, siehe Definition 4.3,
$\boldsymbol{\mathcal{Y}}$	entspricht $C^0(\overline{I}, H)$ bei Prä-Evolutionstripel,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}$	entspricht $L^p(I, V)$ oder $L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, H)$ bei (Prä-)Evolutionstripel,
$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}$	entspricht $L^p(I, V \cap_j H) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, H)$ bei Prä-Evolutionstripel,
$\boldsymbol{\mathcal{W}}$	ist Teilraum von $W_e^{1,p,q'}(I, V, V^*)$ bei Evolutionstripel,
$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathscr{I}}$	ist Teilraum von $W_e^{1,p,q'}(I, V \cap_j H, V^* +_{j^*} H^*)$ bei Prä-Evolutionstripel,
$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{e_{\mathscr{I}}}$	Bochner-Sobolev-Raum bezüglich Einbettung $e_{\mathscr{I}}$, siehe Definition 8.3,

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Dualitätsprodukt auf $X^* \times X$,
$(\cdot, \cdot)_H$	Skalarprodukt auf Hilbertraum H,
$\| \cdot \|_X$	Norm auf Vektorraum X,
$\|\|\| \cdot \|\|\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$	Operatornorm auf Raum der linearen, stetigen Operatoren $\mathcal{L}(X, Y)$,
$\lvert \cdot \rvert$	Absolutbetrag oder eindimensionales Lebesgue-Maß,
$\to$	starke Konvergenz,
$\rightharpoonup$	schwache Konvergenz,
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	$*$-schwache Konvergenz,
$\hookrightarrow, \overset{j}{\hookrightarrow}$	$X \hookrightarrow Y$ entspricht X bettet in Y ein, siehe Definitionen 2.1
$\hookrightarrow\!\!\!\rightarrow, \overset{j}{\hookrightarrow\!\!\!\rightarrow}$	$X \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow Y$ entspricht X bettet kompakt in Y ein,
$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \frac{d_j \boldsymbol{x}}{dt}$	distributionelle Zeitableitung (bezüglich Einbettung j), siehe Definitionen 4.1,
$\frac{\partial^k \boldsymbol{x}}{\partial t^k}, \boldsymbol{x}\prime := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$	klassische k-te Zeitableitung,
A^c	Komplement der Menge A,
$\overline{A}^\tau$	Abschluss bezüglich Topologie τ, $\tau = \| \cdot \|_X$ im Falle einer Normtopologie,
$\tau(X, X^*)$	schwache Topologie auf Banachraum X,
$\langle M \rangle$	lineare Hülle von M,
$\mathrm{conv}(M)$	konvexe Hülle von M,
$D(A)$	effektiver Definitionsbereich der Abbildung A,
$R(A)$	Wertebereich der Abbildung A,
$G(A)$	Graph der Abbildung A,
B_r^X	abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius r im Raum X,
$\mathcal{L}^n(\Omega)$	n-dimensionale Lebesgue'sche Sigma-Algebra über Ω.

1 Stetigkeits- und Wachstumsbegriffe

Zunächst sollen die verwendeten Stetigkeits- und Wachstumsbegriffe aufgeführt werden.

Definition 1.1: (Stetigkeitsbegriffe) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume. Dann bezeichnet man den Operator $A : D(A) \subseteq X \to Y$ als

(i) **stetig**, falls gilt: $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in $X \Rightarrow Ax_n \overset{n\to\infty}{\to} Ax$ in Y.

(ii) **schwach stetig**, falls gilt: $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ in $X \Rightarrow Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax$ in Y.

(iii) **demistetig**, falls gilt: $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in $X \Rightarrow Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax$ in Y.

(iv) **stark stetig**, falls gilt: $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ in $X \Rightarrow Ax_n \overset{n\to\infty}{\to} Ax$ in Y.

(v) **kompakt**, falls $A : D(A) \subseteq X \to Y$ stetig und für alle beschränkten $M \subseteq D(A) \subseteq X$ das Bild $A(M) \subseteq Y$ relativ kompakt ist.

(vi) **beschränkt**, falls für alle beschränkten $M \subseteq D(A) \subseteq X$ auch $A(M) \subseteq Y$ beschränkt ist.

(vii) **lokal beschränkt**, falls zu $x \in D(A)$ Konstanten $\varepsilon, \delta > 0$ existieren, sodass für alle $v \in D(A)$ gilt:

$$\|x - v\|_X \leq \delta \;\Rightarrow\; \|Av\|_Y \leq \varepsilon.$$

(viii) **pseudomonoton**, falls $Y = X^*$ und für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ und $x \in D(A)$ aus

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X \text{ und } \limsup_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n - x\rangle_X \leq 0$$

folgt, dass für alle $y \in X$

$$\langle Ax, x - y\rangle_X \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n - y\rangle_X.$$

(ix) vom **Typ (M)** oder genügt der **Bedingung (M)**, falls $Y = X^*$ und für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ und $x \in D(A)$ aus

$$\begin{aligned} x_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X, \\ Ax_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \xi \text{ in } X^* \\ \text{und } \limsup_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n\rangle_X &\leq \langle \xi, x\rangle_X \end{aligned}$$

folgt, dass $Ax = \xi$ in X^*.

Lemma 1.2: Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume. Dann gilt:

(i) Ein linearer, kompakter Operator $A : X \to Y$ ist stark stetig.

(ii) Falls X reflexiv ist, ist ein stark stetiger Operator $A : X \to Y$ kompakt.

Beweis: Punkt (i) folgt aus dem Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1), da für eine schwach konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A) \subseteq X$ die Folge $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ relativ kompakt ist und aufgrund der schwachen Stetigkeit von $A : X \to Y$ nur einen starken Häufungspunkt nämlich $Ax \in Y$ besitzt. Punkt (ii) zeigt man wie in [Růž04, Kapitel 3, Lemma 1.4 (i)]. ■

Definition 1.3: (Wachstumsbegriffe) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Dann heißt der Operator $A : D(A) \subseteq X \to X^*$

(i) **monoton**, falls $\langle Ax - Ay, x - y\rangle_X \geq 0$ für alle $x, y \in D(A)$.

(ii) **strikt monoton**, falls $\langle Ax - Ay, x - y\rangle_X > 0$ für alle $x, y \in D(A)$ mit $x \neq y$.

(iii) **koerziv**, falls $D(A)$ unbeschränkt ist und $\lim_{\substack{\|x\|_X \to \infty \\ x \in D(A)}} \frac{\langle Ax, x\rangle_X}{\|x\|_X} = \infty$.

Lemma 1.4: (Lokale Beschränktheit monotoner Operatoren) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $A : X \to X^*$ monoton. Dann ist $A : X \to X^*$ lokal beschränkt.

Beweis: Siehe [GGZ74, Kapitel III, Lemma 1.2]. ■

Das folgende Lemma ermöglicht, auch Bilder von Galerkinlösungen unter Operatoren mit nicht beschränkten Anteilen zu kontrollieren, solange diese monoton sind. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung von [GGZ74, Kap. III, Folgerung 1.2], die in dieser angepassten Form später besser angewendet werden kann.

Lemma 1.5: (Beschränktheitskriterium für monotone Operatoren) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $A : X \to X^*$ monoton. Des Weiteren sei $S \subseteq X$ eine Menge, sodass eine Funktion $h : S \to [0, 1]$ und Konstanten $M, C > 0$ existieren mit

$$\begin{aligned} \|s\|_X &\leq M \\ \text{und } h(s)\langle As, s\rangle_X &\leq C \end{aligned}$$

für alle $s \in S$. Dann existiert eine Konstante $K := K(C, M, A) > 0$, sodass

$$\|h(s)As\|_{X^*} \leq K$$

für alle $s \in S$.

Beweis: Da $A : X \to X^*$ nach Lemma 1.4 lokal beschränkt ist, existieren Konstanten $\varepsilon, \delta > 0$, sodass

$$\|Ax\|_{X^*} \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq \delta.$$

Mit einer skalierten Version der Normformel und der Monotonie von $A : X \to X^*$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} \|h(s)As\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_X = \delta} \frac{1}{\delta} h(s)\langle As, x\rangle_X \\ &\leq \sup_{\|x\|_X = \delta} \frac{1}{\delta} h(s) \left(\langle As, s\rangle_X + \langle Ax, x - s\rangle_X\right) \\ &\leq \frac{1}{\delta} \left(C + \varepsilon \left(\delta + M\right)\right) =: K \end{aligned}$$

für alle $s \in S$. ■

2 Schnitte von Banachräumen

Wie bereits angedeutet spielt in der folgenden Existenztheorie der Schnitt $L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I},H)$ bei Evolutionstripel-Struktur (V,H,j) (cf. Definition 5.1) eine entscheidende Rolle. Zunächst steht allerdings noch die Frage der Sinnhaftigkeit des verwendeten Schnitts im Raum. Ein bloßer algebraischer Schnitt verfehlt sein Ziel, denn dieser wäre im Allgemeinen leer. Gleichzeitig gelten jedoch die Einbettungen

$$C^0(\overline{I},H) \hookrightarrow L^p(I,H) \text{ und } L^p(I,V) \overset{\boldsymbol{j}}{\hookrightarrow} L^p(I,H),$$

wobei $\boldsymbol{j} : L^p(I,V) \to L^p(I,H)$ durch $(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t) := j(\boldsymbol{v}(t))$ definiert ist (cf. Lemma 3.10 (ii) und Satz 3.14 (ii)). Die Idee besteht nun darin, die Bilder dieser Einbettungen in $L^p(I,H)$ algebraisch zu schneiden, denn dieser Schnitt ist nichtleer. Dies entspricht der üblichen funktionalanalytischen Definition des Schnitts von Banachräumen, wie er in der Literatur, beispielsweise in [BS88, Chapter 3, 1. Interpolation Spaces] zu finden ist. Da man sich in der späteren Existenztheorie am häufigsten in $L^p(I,V)$ beziehungsweise dessen Dualraum aufhält, zieht man nun zusätzlich diesen Schnitt unter $\boldsymbol{j}$ nach $L^p(I,V)$ zurück. Dies hat den Vorteil, dass man stets in derselben Menge aufhält und weniger Einbettungen und Identifikationen notwendig sind.

Ziel dieses Abschnitts ist es also, allgemeine und hinreichende Bedingungen an Banachräume anzugeben, die es ermöglichen, einen solchen zurückgezogenen Schnitt nach dem beschriebenen Schema zu definieren. Des Weiteren wird dieser Schnitt auf Eigenschaften wie Vollständigkeit, Reflexivität, Separabilität und Darstellung der Dualität untersucht. Schließlich werden mit dem neu definierten Schnitt und seiner untersuchten Topologie Verallgemeinerungen der Begriffe Pseudomonotonie und Bedingung (M) eingeführt.

Definition 2.1: (Einbettung) Seien (X,τ_X) und (Y,τ_Y) topologische Vektorräume und $j : X \to Y$ linear, stetig und injektiv. Dann nennt man j eine **Einbettung** und schreibt

$$X \overset{j}{\hookrightarrow} Y.$$

Für $X \subseteq Y$ und $j = \mathrm{id}_X$ schreibt man einfach $X \hookrightarrow Y$.

Definition 2.2: (Kompatibles Paar) Seien $(X,\|\cdot\|_X)$ und $(Y,\|\cdot\|_Y)$ Banachräume, sodass Einbettungen $e_X : X \to Z$ und $e_Y : Y \to Z$ in einen hausdorffschen, topologischen Vektorraum (Z,τ_Z) existieren. Dann bezeichnet man die Struktur $(X,Y) := (X,Y,Z,e_X,e_Y)$ als ein **kompatibles Paar**.

Definition 2.3: (Zurückgezogener Schnitt von kompatiblem Paar) Sei (X,Y) ein kompatibles Paar. Dann ist

$$j := j_{X,Y} := e_Y^{-1} e_X : e_X^{-1}(R(e_X) \cap R(e_Y)) \subseteq X \to Y$$

wohldefiniert und es bezeichne

$$X \cap_j Y := e_X^{-1}(R(e_X) \cap R(e_Y))$$

den **X-Schnitt von X und Y bezüglich j**. Des Weiteren bezeichne j die **zugehörige Schnitteinbettung**. Im Fall $X,Y \subseteq Z$ mit $e_X = \mathrm{id}_X$ und $e_Y = \mathrm{id}_Y$ setzt man $X \cap Y := X \cap_j Y$.

Satz 2.4: (Vollständigkeit von $X \cap_j Y$) Sei (X, Y) ein kompatibles Paar. Dann ist $X \cap_j Y$ ein Vektorraum und versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_{X\cap_j Y} := \|\cdot\|_X + \|j\cdot\|_Y$$

ein Banachraum.

Beweis: Da $R(e_X) \cap R(e_Y)$ ein Vektorraum ist und $e_X^{-1} : R(e_X) \cap R(e_Y) \to X$ wohldefiniert und linear, trägt auch $X \cap_j Y := e_X^{-1}(R(e_X) \cap R(e_Y))$ Vektorraumstruktur. Insbesondere ist

$$j = e_Y^{-1} e_X : X \cap_j Y \to Y$$

linear und injektiv. Versieht man nun $X \cap_j Y$ mit der durch die Norm

$$\|\cdot\|_{X\cap_j Y} := \|\cdot\|_X + \|j\cdot\|_Y$$

erzeugten Topologie, dann ist $j : X \cap_j Y \to Y$ stetig. Es bleibt Vollständigkeit zu prüfen. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \cap_j Y$ eine Cauchy-Folge. Dann sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $(jx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ Cauchy-Folgen und mit der Vollständigkeit von X und Y folgt die Existenz von Elementen $x \in X$ und $y \in Y$, sodass

$$x_n \overset{n\to\infty}{\to} x \text{ in } X,$$
$$jx_n \overset{n\to\infty}{\to} y \text{ in } Y.$$

Die Stetigkeit von $e_X : X \to Z$ und $e_Y : Y \to Z$ liefert dann, dass

$$e_X x_n \overset{n\to\infty}{\to} e_X x \text{ in } Z,$$
$$e_X x_n = e_Y j x_n \overset{n\to\infty}{\to} e_Y y \text{ in } Z.$$

Da Z ein hausdorffscher, topologischer Vektorraum ist, muss damit $e_X x = e_Y y$ in Z gelten. Das heißt $x \in X \cap_j Y$ mit $y = e_Y^{-1} e_X x = jx$ in Y und $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in $X \cap_j Y$. ∎

Bemerkung 2.5:

(i) Konsistenz: Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, sodass eine Einbettung $j : X \to Y$ existiert, dann definiert $(X, Y) = (X, Y, Y, j, \mathrm{id}_Y)$ auf natürliche Weise ein kompatibles Paar mit Mengengleichheit $X \cap_j Y = X$ und Normäquivalenz $\|\cdot\|_{X\cap_j Y} \sim \|\cdot\|_X$.

(ii) Kommutativität bis auf Isomorphie: Die Notation $X \cap_j Y$ gibt also an, dass man sich in X befindet und diese Menge über j stetig in Y einbettet. Für ein kompatibles Paar (X, Y) ist immer auch $Y \cap_{j^{-1}} X$ als Teilmenge von Y, die über $j^{-1} = e_X^{-1} e_Y$ stetig in X einbettet, wohldefiniert. Man sieht leicht ein, dass

$$j : X \cap_j Y \to Y \cap_{j^{-1}} X$$

ein isometrischer Isomorphismus ist. Damit ist der Schnitt bis auf isometrische Isomorphie kommutativ.

(iii) Eingeschränkte Identität: Um zu unterscheiden bezüglich welcher Topologie man die Identität auf $X \cap_j Y$ betrachtet, bezeichne nun $\mathscr{I} : X \cap_j Y \to X$ mit $\mathscr{I}x = x$ die Identität interpretiert als stetiger Operator bezüglich der $\|\cdot\|_{X\cap_j Y}$-Topologie.

Lemma 2.6: (Assoziativität des zurückgezogenen Schnitts) Seien $(X,Y) = (X,Y,Z,e_X,e_Y)$ und $(Y,W) = (Y,W,Z,e_Y,e_W)$ kompatible Paare und $i := e_W^{-1}e_X$, $j := e_Y^{-1}e_X$ sowie $k := e_W^{-1}e_Y$. Dann existieren die folgenden Schnitte und es gilt

$$(X \cap_j Y) \cap_i W = X \cap_j (Y \cap_k W)$$

mit Normgleichheit $\|\cdot\|_{(X\cap_j Y)\cap_i W} = \|\cdot\|_{X\cap_j(Y\cap_k W)}$.

Beweis: Offensichtlich sind $(X \cap_j Y, W, Z, e_Y j, e_W)$ und $(X, Y \cap_k W, Z, e_X, e_W k)$ kompatible Paare mit

$$\begin{aligned}(X \cap_j Y) \cap_i W &= e_X^{-1}(R(e_Y j) \cap R(e_W)) \\ &= e_X^{-1}(R(e_X) \cap R(e_Y) \cap R(e_W)) \\ &= e_X^{-1}(R(e_X) \cap R(e_W k)) \\ &= X \cap_j (Y \cap_k W).\end{aligned}$$

Die Normgleichheit ergibt sich direkt aus der Definition der Schnitt-Norm gemäß Satz 2.4 mit $i = kj$ auf $(X \cap_j Y) \cap_i W = X \cap_j (Y \cap_k W)$. ∎

Lemma 2.7: (Summe von Bildern als Banachraum) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, (Z,τ) ein hausdorffscher, topologischer Vektorraum sowie $l_X : X \to Z$ und $l_Y : Y \to Z$ linear und stetig. Dann ist $R(l_X) + R(l_Y) \subseteq Z$ versehen mit der Norm

$$\|z\|_{R(l_X)+R(l_Y)} := \inf_{\substack{x\in X, y\in Y \\ z = l_X x + l_Y y}} \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \text{ für } z \in R(l_X) + R(l_Y)$$

ein Banachraum.

Beweis: Zunächst gilt es die Normeigenschaften zu prüfen, wobei Homogenität und die Dreiecksungleichung offensichtlich sind, sodass nur noch Definitheit zu zeigen bleibt. Ist nun $z \in R(l_X)+R(l_Y)$, sodass $\|z\|_{R(l_X)+R(l_Y)} = 0$. Dann existieren Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ mit $z = l_X x_n + l_Y y_n$, $\|x_n\|_X < 1/n$ und $\|y_n\|_Y < 1/n$. Das heißt $x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ in X und $y_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ in Y, woraus mit der Stetigkeit von l_X und l_Y die Konvergenz $z = l_X x_n + l_Y y_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ in Z folgt. Da Z ein hausdorffscher topologischer Vektorraum ist, muss deshalb bereits $z = 0$ in Z gelten. Damit definiert $\|\cdot\|_{R(l_X)+R(l_Y)}$ eine Norm, sodass nur noch die Vollständigkeit zu prüfen bleibt. Hierzu nutzt man, dass ein normierter Raum genau dann vollständig ist, wenn absolut konvergente Reihen konvergieren. Sei also $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R(l_X) + R(l_Y)$ absolut konvergent, das heißt $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_{R(l_X)+R(l_Y)} < \infty$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existieren $x_n \in X$ und $y_n \in Y$ mit $z_n = l_X x_n + l_Y y_n$ und $\max\{\|x_n\|_X, \|y_n\|_Y\} \le \|z_n\|_{R(l_X)+R(l_Y)} + 2^{-n}$, das heißt $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{\|x_n\|_X, \|y_n\|_Y\} < \infty$. Da X und Y vollständig sind, existieren die Grenzwerte $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in X und $y := \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ in Y. Setze nun $z := l_X x + l_Y y$ in Z. Dann gilt mit der Definition von $\|\cdot\|_{R(l_X)+R(l_Y)}$

$$\left\| z - \sum_{n=1}^{m} z_n \right\|_{R(l_X)+R(l_Y)} = \left\| l_X \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} x_n \right) + l_Y \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} y_n \right) \right\|_{R(l_X)+R(l_Y)}$$

$$\leq \max\left\{\left\|\sum_{n=m+1}^{\infty} x_n\right\|_X, \left\|\sum_{n=m+1}^{\infty} y_n\right\|_Y\right\} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \max\{\|x_n\|_X, \|y_n\|_Y\} \overset{m\to\infty}{\to} 0. \qquad \blacksquare$$

Satz 2.8: (Eigenschaften von $X \cap_j Y$) Sei (X, Y) ein kompatibles Paar. Dann gilt:

(i) Für reflexive X und Y ist $X \cap_j Y$ reflexiv.

(ii) Für separable X und Y ist $X \cap_j Y$ separabel.

(iii) Es gilt folgende Darstellung der Dualität

$$(X \cap_j Y)^* = R(\mathscr{I}^*) + R(j^*) =: X^* +_{j^*} Y^*.$$

Stattet man zusätzlich $X^* +_{j^*} Y^*$ mit der Norm $\|\cdot\|_{X^*+_{j^*}Y^*} := \|\cdot\|_{R(\mathscr{I}^*)+R(j^*)}$ aus Lemma 2.7 aus, dann gilt Normgleichheit $\|\cdot\|_{X^*+_{j^*}Y^*} = \|\cdot\|_{(X\cap_j Y)^*}$.

Beweis:

ad (i) Es sei der Produktraum $X \times Y$ mit der Summennorm $\|(x,y)^T\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$ versehen. Dann liefert die Abbildung

$$L : X \cap_j Y \to G(j) \subseteq X \times Y \text{ mit } Lx := (\mathscr{I}x, jx)^T$$

einen isometrischen Isomorphismus. Sind nun X und Y reflexiv, dann auch $X \times Y$, was sich unmittelbar aus dem Satz von Tychonoff (cf. Satz A.2) ergibt. Die Vollständigkeit von $X \cap_j Y$ (cf. Satz 2.4) und die Isometrie L liefern, dass $G(j)$ abgeschlossen ist und damit selbst reflexiv. Die Isomorphie bewirkt schließlich, dass auch $X \cap_j Y$ reflexiv ist.

ad (ii) Sind X und Y separabel, dann auch $X \times Y$ und somit $G(j)$. Da L ein isometrischer Isomorphismus ist, muss auch $X \cap_j Y$ separabel sein.

ad (iii) Man geht in drei Schritten vor:

1. Schritt: (Charakterisierung von $(X \times Y)^*$) Bezeichnen

$$\pi_X : X \times Y \to X \text{ mit } \pi_X(x,y)^T := x,$$
$$\pi_Y : X \times Y \to Y \text{ mit } \pi_Y(x,y)^T := y$$

die kanonischen Projektionen auf $X \times Y$ und

$$\iota_X : X \to X \times Y \text{ mit } \iota_X x := (x,0)^T,$$
$$\iota_Y : Y \to X \times Y \text{ mit } \iota_Y y := (0,y)^T$$

die kanonischen Inklusionen. Dann ist offensichtlich $R(\pi_X^*) + R(\pi_Y^*) \subseteq (X \times Y)^*$. Insbesondere gilt wegen $\mathrm{id}_{X\times Y} = \iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y$, dass

$$\begin{aligned}(X \times Y)^* &= R(\mathrm{id}^*_{X\times Y}) \\ &= R(\pi_X^*\iota_X^* + \pi_Y^*\iota_Y^*) \\ &\subseteq R(\pi_X^*\iota_X^*) + R(\pi_Y^*\iota_Y^*) \\ &\subseteq R(\pi_X^*) + R(\pi_Y^*).\end{aligned}$$

Dabei wurde von den Rechenregeln aus Satz A.11 und den für lineare Operatoren A, B, C geltenden Inklusionen $R(A+B) \subseteq R(A) + R(B)$ und $R(CA) \subseteq R(C)$ Gebrauch gemacht. Insgesamt gilt also $R(\pi_X^*) + R(\pi_Y^*) = (X \times Y)^*$.

2. Schritt: (Charakterisierung von $(X \cap_j Y)^*$) Nun ist $R(L) = G(j)$ abgeschlossen und $N(L) = \{0\}$, sodass der Satz vom abgeschlossenen Bild (cf. Satz A.13) wiederum liefert, dass

$$\begin{aligned}(X \cap_j Y)^* &= N(L)^\perp \\ &= R(L^*) \\ &= L^*(R(\pi_X^*) + R(\pi_Y^*)) \\ &= L^* R(\pi_X^*) + L^* R(\pi_Y^*) \\ &= R((\pi_X L)^*) + R((\pi_Y L)^*) \\ &= R(\mathscr{I}^*) + R(j^*) =: X^* +_{j^*} Y^*.\end{aligned}$$

Dabei wurde im fünften Gleichheitszeichen von der für lineare Operatoren geltenden Identität $AR(B) = R(AB)$ Gebrauch gemacht.

3. Schritt: (Normgleichheit) Sei $z^* \in (X \cap_j Y)^* = X^* +_{j^*} Y^*$ und $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ beliebig, sodass $z^* = \mathscr{I}^* x^* + j^* y^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|z^*\|_{(X\cap_j Y)^*} &= \sup_{\|x\|_{X\cap_j Y}\leq 1} \langle x^*, x\rangle_X + \langle y^*, jx\rangle_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_{X\cap_j Y}\leq 1} \max\{\|x^*\|_{X^*}, \|y^*\|_{Y^*}\}(\|x\|_X + \|jx\|_Y) \\ &\leq \max\{\|x^*\|_{X^*}, \|y^*\|_{Y^*}\}.\end{aligned}$$

Das heißt $\|z^*\|_{(X\cap_j Y)^*} \leq \|z^*\|_{X^*+_{j^*}Y^*}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (cf. Satz A.4) existiert ein Fortsetzungsoperator $\mathscr{F} : G(j)^* \to 2^{(X\times Y)^*}$ mit

$$\langle f, (x, jx)^T\rangle_{X\times Y} = \langle g, (x, jx)^T\rangle_{G(j)} \text{ und } \|f\|_{(X\times Y)^*} = \|g\|_{G(j)^*}$$

für alle $x \in X \cap_j Y$, $f \in \mathscr{F}g$ und $g \in G(j)^*$. Dann gilt für $f \in \mathscr{F}(L^*)^{-1}z^*$, $\overline{x}^* := f \circ \iota_X \in X^*$ und $\overline{y}^* := f \circ \iota_Y \in Y^*$ wie man leicht einsieht $z^* = \mathscr{I}^*\overline{x}^* + j^*\overline{y}^*$ in $X^* +_{j^*} Y^*$, das heißt

$$\begin{aligned}\|z^*\|_{X^*+_{j^*}Y^*} &\leq \max\{\|\overline{x}^*\|_{X^*}, \|\overline{y}^*\|_{Y^*}\} \leq \|f\|_{(X\times Y)^*} \\ &= \|(L^*)^{-1}z^*\|_{G(j)^*} = \|z^*\|_{(X\cap_j Y)^*}.\end{aligned}$$

■

Folgerung 2.9: (Charakterisierung von schwacher Konvergenz) Sei (X, Y) ein kompatibles Paar. Dann gilt

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X \cap_j Y$$

genau dann, wenn

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X \text{ und } jx_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} jx \text{ in } Y.$$

Beweis: Folgt direkt aus Satz 2.8 (iii). ■

Lemma 2.10: Sei (X, Y) ein kompatibles Paar mit reflexivem X. Dann folgt für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \cap_j Y$ und ein $x \in X \cap_j Y$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty \text{ und } jx_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} jx \text{ in } Y,$$

dass $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ in $X \cap_j Y$.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\Lambda} \subseteq X \cap_j Y$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige Teilfolge. Dann ist $(x_n)_{n\in\Lambda} \subseteq X$ insbesondere beschränkt. Aus dem Satz von Eberlein-Šmuljan (cf. Satz A.7) folgt jetzt die Existenz einer Teilfolge $(x_n)_{n\in\Lambda_1} \subseteq X \cap_j Y$ mit $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$ und eines Elements $\tilde{x} \in X$, sodass

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \tilde{x} \text{ in } X \ (n \in \Lambda_1).$$

Es ist $((x_n, jx_n)^T)_{n\in\Lambda_1} \subseteq G(j)$. Da schwache Konvergenz aller Komponenten schwache Konvergenz im Produktraum impliziert, gilt mit den obigen Überlegungen zusätzlich

$$(x_n, jx_n)^T \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\tilde{x}, jx)^T \text{ in } X \times Y \ (n \in \Lambda_1).$$

Dabei ist der Produktraum $X \times Y$ wieder mit der Summennorm $\|(x, y)^T\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$ versehen und $G(j)$ wie im Beweis von Satz 2.8 gezeigt abgeschlossen bezüglich der $\|\cdot\|_{X\times Y}$-Topologie und damit schwach abgeschlossen, da gleichzeitig konvex. Folglich muss

$$(\tilde{x}, jx)^T \in G(j) \text{ also } \tilde{x} \in X \cap_j Y \text{ mit } jx = j\tilde{x} \text{ in } Y$$

gelten. Mit der Injektivität von $j : X \cap_j Y \to Y$ muss insbesondere $x = \tilde{x}$ in $X \cap_j Y$ sein. Die Charakterisierung der schwachen Konvergenz in Schnitten (cf. Folgerung 2.9) liefert also

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X \cap_j Y \ (n \in \Lambda_1).$$

Damit ist $x \in X \cap_j Y$ schwacher Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \cap_j Y$. Das Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1) liefert schließlich, dass

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X \cap_j Y. \qquad \blacksquare$$

Folgerung 2.11: Sei (X, Y) ein kompatibles Paar und $(X', \|\cdot\|_{X'})$ und $(Y', \|\cdot\|_{Y'})$ Banachräume, sodass $X' \hookrightarrow X^*$ und $Y' \hookrightarrow Y^*$. Dann ist der Raum

$$X' +_{j^*} Y' := R(\mathscr{I}^* \mathrm{id}_{X'}) + R(j^* \mathrm{id}_{Y'}) \subseteq X^* +_{j^*} Y^*$$

versehen mit der Norm

$$\|z^*\|_{X'+_{j^*}Y'} := \inf_{\substack{x'\in X', y'\in Y' \\ z^* = \mathscr{I}^* x' + j^* y'}} \max\{\|x'\|_{X'}, \|y'\|_{Y'}\}$$

ein Banachraum und es gilt

$$X' +_{j^*} Y' \hookrightarrow X^* +_{j^*} Y^*.$$

Beweis: Aus Lemma 2.7 folgt direkt, dass $X' +_{j^*} Y'$ mit der angegebenen Norm ein Banachraum ist. Wegen $X' \hookrightarrow X^*$ und $Y' \hookrightarrow Y^*$ existieren insbesondere Konstanten $C_{X'}, C_{Y'} > 0$, sodass $\|\cdot\|_{X^*} \leq C_{X'}\|\cdot\|_{X'}$ auf X' und $\|\cdot\|_{Y^*} \leq C_{Y'}\|\cdot\|_{Y'}$ auf Y'. Das heißt

$$\begin{aligned}
\|z'\|_{X^*+_{j^*}Y^*} &= \inf_{\substack{x^*\in X^*, y^*\in Y^* \\ z'=\mathscr{I}^*x^*+j^*y^*}} \max\{\|x^*\|_{X^*}, \|y^*\|_{Y^*}\} \\
&\leq \inf_{\substack{x'\in X', y'\in Y' \\ z'=\mathscr{I}^*x'+j^*y'}} \max\{\|x'\|_{X^*}, \|y'\|_{Y^*}\} \\
&\leq \max\{C_{X'}, C_{Y'}\} \inf_{\substack{x'\in X', y'\in Y' \\ z'=\mathscr{I}^*x'+j^*y'}} \max\{\|x'\|_{X'}, \|y'\|_{Y'}\} \\
&= \max\{C_{X'}, C_{Y'}\}\|z'\|_{X'+_{j^*}Y'}
\end{aligned}$$

für alle $z' \in X' +_{j^*} Y'$ und damit $X' +_{j^*} Y' \hookrightarrow X^* +_{j^*} Y^*$. ■

Definition 2.12: (Verallgemeinerte Pseudomonotonie) Sei (X, Y) ein kompatibles Paar. Dann heißt der Operator $A : D(A) \subseteq X \cap_j Y \to X^*$ **verallgemeinert pseudomonoton**, falls für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ und $x \in D(A)$ aus

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X \cap_j Y \text{ und } \limsup_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n - x\rangle_X \leq 0$$

folgt, dass für alle $y \in X$

$$\langle Ax, x - y\rangle_X \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n - y\rangle_X.$$

Definition 2.13: (Verallgemeinerte Bedingung (M)) Sei (X, Y) ein kompatibles Paar. Dann genügt der Operator $A : D(A) \subseteq X \cap_j Y \to X^*$ der **verallgemeinerten Bedingung (M)**, falls für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ und $x \in D(A)$ aus

$$\begin{aligned}
x_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X \cap_j Y, \\
Ax_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \xi \text{ in } X^*, \\
\text{und } \limsup_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n\rangle_X &\leq \langle \xi, x\rangle_X
\end{aligned}$$

folgt, dass $Ax = \xi$ in X^*.

Bemerkung 2.14: (Konsistenz)

(i) Ist (X, Y) ein kompatibles Paar und $A : X \to X^*$ pseudomonoton oder genüge der Bedingung (M), dann ist wegen $X \cap_j Y \hookrightarrow X$ die Einschränkung $A : X \cap_j Y \to X^*$ verallgemeinert pseudomonoton beziehungsweise genügt der verallgemeinerten Bedingung (M).

(ii) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, sodass eine Einbettung $j : X \to Y$ existiert. Dann gilt gemäß Bemerkung 2.5 (i) die Mengengleichheit $X = X \cap_j Y$ mit Normäquivalenz, sodass verallgemeinerte Pseudomonotonie und verallgemeinerte Bedingung (M) mit Pseudomonotonie beziehungsweise Bedingung (M) zusammenfallen.

Lemma 2.15: (Vergleich der Begriffe) Sei (X, Y) ein kompatibles Paar. Ist der Operator $A : D(A) \subseteq X \cap_j Y \to X^*$ verallgemeinert pseudomonoton, dann genügt er auch der verallgemeinerten Bedingung (M).

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ eine Folge, die

$$\begin{aligned} x_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X \cap_j Y, \\ Ax_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \xi \text{ in } X^* \\ \text{und } \limsup_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n\rangle_X &\leq \langle \xi, x\rangle_X \end{aligned}$$

erfüllt. Mit der verallgemeinerten Pseudomonotonie folgt unmittelbar, dass

$$\langle \xi, x - y\rangle_X \geq \liminf_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n - y\rangle_X \geq \langle Ax, x - y\rangle_X$$

für alle $y \in X$ und daraus $Ax = \xi$ in X^*. Das heißt $A : X \cap_j Y \to X^*$ genügt der verallgemeinerten Bedingung (M). ■

Lemma 2.16: (Stetigkeitseigenschaft der verallgemeinerten Bedingung (M)) Sei (X, Y) ein kompatibles Paar mit reflexivem X. Der Operator $A : D(A) \subseteq X \cap_j Y \to X^*$ genüge der verallgemeinerten Bedingung (M) und sei lokal beschränkt. Dann ist $A : D(A) \subseteq X \cap_j Y \to X^*$ zusätzlich demistetig.

Beweis: Es gelte also $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in $X \cap_j Y$ für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ und $x \in D(A)$. Dann ist $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ beschränkt. Die Reflexivität von X^* liefert nun zusammen mit dem Satz von Eberlein-Šmulian (cf. Satz A.7) die Existenz einer Teilfolge $(Ax_n)_{n\in\Lambda} \subseteq X^*$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ und eines $\xi \in X^*$, sodass $Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \xi$ in X^* $(n \in \Lambda)$ und damit

$$\limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle Ax_n, x_n\rangle_X = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle Ax_n, x_n\rangle_X = \langle \xi, x\rangle_X.$$

Die verallgemeinerte Bedingung (M) liefert nun $Ax = \xi$ in X^*, das heißt $Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax$ in X^* $(n \in \Lambda)$. Da diese Argumentation für jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch von $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ gilt, ist $Ax \in X^*$ schwacher Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$. Das Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1) liefert schließlich, dass $\Lambda = \mathbb{N}$ gewählt werden kann und damit

$$Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax \text{ in } X^*.$$

Schließlich ist $A : D(A) \subseteq X \cap_j Y \to X^*$ demistetig. ■

Von besonderer Bedeutung gerade im Hinblick auf das später zu konstruierende Galerkin-Verfahren ist, Operatoren auf Teilräume des ursprünglichen Definitionsbereichs zu beschränken und zu untersuchen, inwiefern sich ihre Eigenschaften ver- und erhalten. Dabei zeigt sich, dass die oben eingeführten Begriffe stabil unter solchen Einschränkungen sind.

Lemma 2.17(Einschränkung der Operatoren auf Unterräume) Sei $(X,Y) := (X,Y,Z,e_X,e_Y)$ ein kompatibles Paar. Sind $(X_0,\|\cdot\|_{X_0})$ und $(Y_0,\|\cdot\|_{Y_0})$ Banachräume, sodass Einbettungen $j_X : X_0 \to X$ und $j_Y : Y_0 \to Y$ existieren. Dann ist $(X_0,Y_0) := (X_0,Y_0,Z,e_Xj_X,e_Yj_Y)$ ein kompatibles Paar mit zugehöriger Schnitteinbettung

$$j_0 := (e_Yj_Y)^{-1}e_Xj_X = (j_Y)^{-1}jj_X : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to Y_0$$

und es gilt

$$X_0 \cap_{j_0} Y_0 \overset{j_X}{\hookrightarrow} X \cap_j Y.$$

Sei weiter $A : X \cap_j Y \to X^*$ ein Operator. Bezeichne dann den Operator

$$A_{(j_X,j_Y)} := j_X^*Aj_X : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to X_0^*$$

als die **Einschränkung von A bezüglich** (j_X,j_Y). Dann gilt:

(i) $\langle A_{(j_X,j_Y)}y,x\rangle_{X_0} = \langle Aj_Xy,j_Xx\rangle_X$ für alle $y \in X_0 \cap_{j_0} Y_0$ und $x \in X_0$.

(ii) Ist $A : X \cap_j Y \to X^*$ beschränkt, dann auch $A_{(j_X,j_Y)} : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to X_0^*$.

(iii) Sind X und X_0 reflexiv, $A_0 : X \to X^*$ monoton und $B : X \cap_j Y \to X^*$ beschränkt, sodass $A := A_0 + B : X \cap_j Y \to X^*$ der verallgemeinerten Bedingung (M) genügt, dann genügt auch $A_{(j_X,j_Y)} : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to X_0^*$ der verallgemeinerten Bedingung (M) und ist demistetig.

Beweis: Es ist offensichtlich $(X_0,Y_0) := (X_0,Y_0,Z,e_Xj_X,e_Yj_Y)$ ein kompatibles Paar im Sinne von Definition 2.2 und der Schnitt $X_0 \cap_{j_0} Y_0$ mit zugehöriger Schnitteinbettung

$$j_0 := (e_Yj_Y)^{-1}e_Xj_X = (j_Y)^{-1}jj_X : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to Y_0$$

ist wohldefiniert. Des Weiteren ist nach Definition des zurückgezogenen Schnitts (cf. Definition 2.3)

$$\begin{aligned} X_0 \cap_{j_0} Y_0 &= (e_Xj_X)^{-1}(R(e_Xj_X) \cap R(e_Yj_Y)) \\ &= j_X^{-1}(e_X^{-1}(R(e_Xj_X) \cap R(e_Yj_Y))) \\ &\subseteq j_X^{-1}(e_X^{-1}(R(e_X) \cap R(e_Y))) = j_X^{-1}(X \cap_j Y) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|j_Xx\|_{X\cap_j Y} &= \|j_Xx\|_X + \|jj_Xx\|_Y \\ &= \|j_Xx\|_X + \|j_Yj_0x\|_Y \\ &\leq \max\{|||j_X|||_{\mathcal{L}(X_0,X)}, |||j_Y|||_{\mathcal{L}(Y_0,Y)}\}(\|x\|_{X_0} + \|j_0x\|_{Y_0}) \\ &= \max\{|||j_X|||_{\mathcal{L}(X_0,X)}, |||j_Y|||_{\mathcal{L}(Y_0,Y)}\}\|x\|_{X_0\cap_{j_0}Y_0} \end{aligned}$$

für alle $x \in X_0 \cap_{j_0} Y_0$. Es gilt also $X_0 \cap_{j_0} Y_0 \overset{j_X}{\hookrightarrow} X \cap_j Y$.

ad (i): Folgt direkt aus der Definition von $A_{(j_X,j_Y)} : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to X_0^*$.

ad (ii): Folgt aus der Einbettung $X_0 \cap_{j_0} Y_0 \overset{j_X}{\hookrightarrow} X \cap_j Y$ zusammen mit der Beschränktheit von $j_X^* : X^* \to X_0^*$ und $A : X \cap_j Y \to X^*$.

ad (iii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_0 \cap_{j_0} Y_0$ eine Folge, sodass

$$\begin{aligned} x_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X_0 \cap_{j_0} Y_0 \overset{j_X}{\hookrightarrow} X \cap_j Y, \\ A_{(j_X,j_Y)}x_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \xi \text{ in } X_0^* \\ \text{und } \limsup_{n\to\infty} \langle A_{(j_X,j_Y)}x_n, x_n\rangle_{X_0} &\leq \langle \xi, x\rangle_{X_0}. \end{aligned}$$

Dann existieren insbesondere Konstanten $M, M' > 0$, sodass

$$\|x_n\|_{X_0\cap_{j_0}Y_0} \leq M \text{ und } \|A_{(j_X,j_Y)}x_n\|_{X_0^*} \leq M'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Punkt (ii) ist $B_{(j_X,j_Y)} : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to X_0^*$ beschränkt. Damit existiert außerdem eine Konstante $C > 0$, sodass $\|B_{(j_X,j_Y)}x_n\|_{X_0^*} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle A_0 j_X x_n, j_X x_n\rangle_X &= \langle A_{(j_X,j_Y)}x_n, x_n\rangle_{X_0} - \langle B_{(j_X,j_Y)}x_n, x_n\rangle_{X_0} \\ &\leq (\|A_{(j_X,j_Y)}x_n\|_{X_0^*} + \|B_{(j_X,j_Y)}x_n\|_{X_0^*})\|x_n\|_{X_0} \leq (M'+C)M \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Des Weiteren ist wegen $X_0 \cap_{j_0} Y_0 \overset{j_X}{\hookrightarrow} X \cap_j Y$ auch die Folge $(j_X x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \cap_j Y$ beschränkt. Nun liefert Lemma 1.5 wegen der Monotonie von $A_0 : X \to X^*$ für $S = (j_X x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $h \equiv 1$ eine Konstante $K > 0$, sodass $\|A_0 j_X x_n\|_{X^*} \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Beschränktheit von $B : X \cap_j Y \to X^*$ sichert dann insgesamt, dass $(Aj_X x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ beschränkt ist. Die Reflexivität von X^* zusammen mit dem Satz von Eberlein-Šmulian (cf. Satz A.7) liefert nun eine Teilfolge $(Aj_X x_n)_{n\in\Lambda} \subseteq X^*$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ und ein $\eta \in X^*$, sodass

$$Aj_X x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \eta \text{ in } X^* \ (n \in \Lambda).$$

Da $j_X^* : X^* \to X_0^*$ schwach stetig ist, gilt insbesondere

$$A_{(j_X,j_Y)}x_n = j_X^* A j_X x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} j_X^*\eta \text{ in } X_0^* \ (n \in \Lambda),$$

das heißt $j_X^*\eta = \xi$ in X_0^*. Schließlich ist

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle Aj_X x_n, j_X x_n\rangle_X &= \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle A_{(j_X,j_Y)}x_n, x_n\rangle_{X_0} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \langle A_{(j_X,j_Y)}x_n, x_n\rangle_{X_0} \\ &\leq \langle \xi, x\rangle_{X_0} = \langle j_X^*\eta, x\rangle_{X_0} = \langle \eta, j_X x\rangle_X. \end{aligned}$$

Da wegen $X_0 \cap_{j_0} Y_0 \overset{j_X}{\hookrightarrow} X \cap_j Y$ auch $j_X x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} j_X x$ in $X \cap_j Y$ gilt und $A : X \cap_j Y \to X^*$ der verallgemeinerten Bedingung (M) genügt, muss dann schon $Aj_X x = \eta$ in X^* und damit $A_{(j_X,j_Y)}x = j_X^* A j_X x = j_X^*\eta = \xi$ in X_0^* gelten. Damit genügt $A_{(j_X,j_Y)} : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to X_0^*$ der verallgemeinerten Bedingung (M). Offensichtlich ist $(A_0)_{(j_X,j_Y)} = j_X^* A_0 j_X : X_0 \to X_0^*$ weiterhin wohldefiniert und monoton, also lokal beschränkt. Folglich ist auch $(A_0)_{(j_X,j_Y)} : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to X_0^*$ lokal beschränkt. Mit der Beschränktheit von $B_{(j_X,j_Y)} : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to X_0^*$ folgt, dass auch $A_{(j_X,j_Y)} : X_0 \cap_{j_0} Y_0 \to X_0^*$ lokal beschränkt ist und zusammen mit der verallgemeinerten Bedingung (M) folgt schließlich aus Lemma 2.16 die Demistetigkeit. ■

3 Funktionen mit Werten in Banachräumen

Nun werden die wichtigsten Banachraumwertigen Funktionenräume eingeführt und untersucht, die in der späteren Existenztheorie eine Rolle spielen. Anschließend betrachtet man gemäß des vorangegangenen Abschnitts Schnitte zwischen diesen Räumen und prüft auch diese auf ihre besonderen Eigenschaften.

Definition 3.1: (Stetig-(differenzierbare) Funktionen) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Dann bezeichne

$$C^k(I, X) := \{\boldsymbol{v} : I \subseteq \mathbb{R} \to X \text{ stetig} \mid \boldsymbol{v} \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar auf } I\}$$

den **Raum der X-wertigen auf I stetigen** ($k = 0$) **beziehungsweise k-mal stetig differenzierbaren** ($k \geq 1$) **Funktionen**.

Satz 3.2: (Vollständigkeit von $C^k(\overline{I}, X)$) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann ist $C^k(\overline{I}, X)$ versehen mit der Norm

$$\|\boldsymbol{v}\|_{C^k(\overline{I},X)} := \sum_{i=0}^{k} \max_{t \in \overline{I}} \|\boldsymbol{v}^{(i)}(t)\|_X$$

ein Banachraum.

Beweis: Siehe [GGZ74, Kap. IV, Satz 1.1]. ■

Satz 3.3: (Charakterisierung der schwachen Konvergenz in $C^0(\overline{I}, X)$) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0, T)$ und $0 < T < \infty$. Dann konvergiert eine Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^0(\overline{I}, X)$ genau dann schwach gegen $\boldsymbol{x} \in C^0(\overline{I}, X)$, wenn $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^0(\overline{I}, X)$ beschränkt ist und

$$\boldsymbol{x}_n(t) \overset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{x}(t) \text{ in } X$$

für alle $t \in \overline{I}$.

Beweis: Siehe [BT38, Theorem 4.3]. ■

Definition 3.4: (Demistetige Funktionen) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Dann bezeichne

$$C^0_\omega(I, X) := \{\boldsymbol{v} : I \subseteq \mathbb{R} \to X \mid \boldsymbol{v} \text{ ist demistetig auf } I\}$$

den **Raum der X-wertigen auf I demistetigen Funktionen**.

Satz 3.5: (Lokalkonvexe Topologie auf $C^0_\omega(\overline{I}, X)$) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0, T)$ und $0 < T < \infty$. Dann ist $C^0_\omega(\overline{I}, X)$ versehen mit den Halbnormen

$$p_{x^*}(\boldsymbol{x}) := \max_{t \in \overline{I}} |\langle x^*, \boldsymbol{x}(t) \rangle_X| \text{ für } x^* \in X^*$$

ein lokalkonvexer Vektorraum. Für reflexives X ist $C^0_\omega(\overline{I}, X)$ zusätzlich vollständig.

Beweis: Siehe [GGZ74, Kap. IV, Satz 1.2]. ■

Die Begriffe Bochner-Messbarkeit und Bochner-Integral sind wie üblich definiert, zum Beispiel wie in [GGZ74, Kap. IV, Definitionen 1.4 und 1.5], [Yos80, Kap. V, Abschnitt 4, Definition 1 und Abschnitt 5, Definition 1] oder [Zei90B, Appendix (a)]. Des Weiteren gelten die folgenden Resultate.

Satz 3.6: (Pettis) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$ und $0 < T < \infty$. Dann ist $\boldsymbol{x} : I \to X$ genau dann Bochner-messbar, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

(i) Schwache Messbarkeit: Für alle $x^* \in X^*$ ist $\langle x^*, \boldsymbol{x}(\cdot)\rangle_X : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar.

(ii) Fast Separabelwertigkeit: Es existiert ein $N \in \mathcal{L}^1(I)$ mit $|N^c| = 0$, sodass $R(\boldsymbol{x}_{|_N})$ separabel ist.

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter V, 4., Theorem: (Pettis)]. ■

Folgerung 3.7: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$ und $0 < T < \infty$. Ist $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to X$ eine Folge Bochner-messbarer Funktionen und $\boldsymbol{x} : I \to X$, sodass

$$\boldsymbol{x}_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{x}(t) \text{ in } X$$

für fast alle $t \in I$. Dann ist $\boldsymbol{x} : I \to X$ Bochner-messbar.

Beweis: Der Satz von Pettis liefert, dass $\boldsymbol{x}_n : I \to X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ schwach messbar ist und eine Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(I)$ mit $|N_n^c| = 0$ existiert, sodass $R(\boldsymbol{x}_{n|_{N_n}})$ separabel ist. Dann ist

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(\boldsymbol{x}_{n|_{N_n}})\right)$$

als abzählbare Vereinigung und konvexe Hülle separabler Mengen ebenfalls separabel. Nach Voraussetzung existiert ein $N_0 \in \mathcal{L}^1(I)$ mit $|N_0^c| = 0$, sodass

$$\langle x^*, \boldsymbol{x}_n(t)\rangle_X \overset{n\to\infty}{\to} \langle x^*, \boldsymbol{x}(t)\rangle_X$$

für alle $x^* \in X^*$ und $t \in N_0$ gilt. Damit ist $\langle x^*, \boldsymbol{x}(\cdot)\rangle_X$ als fast überall punktweiser Grenzwert Lebesgue-messbarer Funktionen wieder Lebesgue-messbar, also $\boldsymbol{x} : I \to X$ schwach messbar. Insbesondere gilt für $N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} N_n \in \mathcal{L}^1(I)$, dass $|N^c| = 0$. Da konvexe Mengen genau dann schwach abgeschlossen sind, wenn sie stark abgeschlossen sind, folgt zusammen mit der fast überall punktweisen schwachen Konvergenz, dass

$$R(\boldsymbol{x}_{|_N}) \subseteq \overline{\operatorname{conv}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(\boldsymbol{x}_{n|_{N_n}})\right)}^{\tau(X,X^*)} = \overline{\operatorname{conv}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(\boldsymbol{x}_{n|_{N_n}})\right)}^{\|\cdot\|_X}.$$

Damit ist $R(\boldsymbol{x}_{|_N})$ als Teilmenge einer separablen Menge wieder separabel. Schließlich ist $\boldsymbol{x} : I \to X$ schwach messbar und fast separabelwertig. Satz 3.6 liefert nun die Behauptung. ■

Definition 3.8: (Bochner-Lebesgue-Räume) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ und

$$\mathcal{L}^p(I,X) := \left\{ \boldsymbol{x} : I \to X \middle| \boldsymbol{x} \text{ Bochner-messbar und } \|\boldsymbol{x}(\cdot)\|_X \in L^p(I) \right\}.$$

Bezeichne $\sim_X$ die Äquivalenzrelation bezüglich Gleichheit fast überall und der Quotientenraum

$$L^p(I,X) := \mathcal{L}^p(I,X)_{/\sim_X}$$

den **Bochner-Lebesgue-Raum**. Seine Elemente sind Äquivalenzklassen $[\boldsymbol{x}]_X := [\boldsymbol{x}]_{/\sim_X}$. Die Abbildung $\boldsymbol{x} \mapsto [\boldsymbol{x}]_X$ definiert einen Operator $[\cdot]_X : \mathcal{L}^p(I,X) \to L^p(I,X)$.

Satz 3.9: (Vollständigkeit) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann definiert $L^p(I,X)$ versehen mit der Norm

$$\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)} := \| \|\boldsymbol{x}(\cdot)\|_X \|_{L^p(I)}$$

einen Banachraum. Für $1 \leq p < \infty$ und separables X ist insbesondere $L^p(I,X)$ separabel.

Beweis: Siehe [GGZ74, Kap. IV, Satz 1.11] und [Zei90A, Proposition 23.2]. ■

Lemma 3.10: (Inklusion und Einbettung) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$ und $0 < T < \infty$. Dann gilt:

(i) $C^0_\omega(\overline{I},X) \subseteq \mathcal{L}^\infty(I,X)$. Insbesondere ist der Äquivalenzklassenoperator $[\cdot]_X : C^0_\omega(\overline{I},X) \to L^\infty(I,X)$ aus Definition 3.8 wohldefiniert und injektiv.

(ii) $[\cdot]_X : C^0(\overline{I},X) \to L^\infty(I,X)$ ist wohldefiniert und erfüllt $\| [\boldsymbol{x}]_X \|_{L^\infty(I,X)} := \|\boldsymbol{x}\|_{C^0(\overline{I},X)}$.

Beweis: Es reicht Punkt (i) nachzuweisen, denn Punkt (ii) folgt daraus unmittelbar. Für jedes $\boldsymbol{x} \in C^0_\omega(\overline{I},X)$ ist $\boldsymbol{x} : I \to X$ schwach messbar und $R(\boldsymbol{x})$ separabel bezüglich $\tau(X,X^*)$, da $\boldsymbol{x} : I \to X$ demistetig und I separabel ist. Mit dem Satz von Mazur sieht man leicht ein, dass $R(\boldsymbol{x})$ auch stark separabel ist. Der Satz von Pettis (cf. Satz 3.6) liefert dann, dass $\boldsymbol{x} : I \to X$ Bochner-messbar ist. Die letzte Aussage ist auch in [GGZ74, Kap. IV, Satz 1.19] zu finden. Genauer gilt für jedes $x^* \in X^*$, dass $\langle x^*, \boldsymbol{x}(\cdot)\rangle_X \in C^0(\overline{I})$, also

$$\max_{t \in \overline{I}} |\langle x^*, \boldsymbol{x}(t)\rangle_X| < \infty.$$

Der Satz von Banach-Steinhaus liefert jetzt eine Konstante $M > 0$, sodass $\|\boldsymbol{x}(t)\|_X \leq M$ für alle $t \in \overline{I}$, das heißt $\boldsymbol{x} \in L^\infty(I,X)$. Die Injektivität von $[\cdot]_X : C^0_\omega(\overline{I},X) \to L^\infty(I,X)$ gilt, da demistetige Funktionen die fast überall übereinstimmen bereits identisch sein müssen. ■

Innerhalb von Bochner-Lebesgue-Räumen reicht es stets einen beliebigen Repräsentanten $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{x}]_X$ zu betrachten, sodass in der Folge die Unterscheidung zwischen Klassen und Repräsentanten entfällt und man der Einfachheit halber $\boldsymbol{x}$ statt $[\boldsymbol{x}]_X$ schreibt. Gemäß der Injektivität aus Lemma 3.10 identifiziert man auch $C^0_\omega(\overline{I},X)$ und $C^0(\overline{I},X)$ mit $[\cdot]_X\,(C^0_\omega(\overline{I},X))$ beziehungsweise $[\cdot]_X\,(C^0(\overline{I},X))$, indem Punktauswertung stets im Sinne des (demi-)stetigen Repräsentanten verstanden wird, und schreibt einfach $C^0_\omega(\overline{I},X), C^0(\overline{I},X) \subseteq L^\infty(I,X)$. Gemäß Lemma 3.10 (ii) fallen $C^0(\overline{I},X)$ und $[\cdot]_X\,(C^0(\overline{I},X))$ sogar topologisch zusammen und man schreibt $C^0(\overline{I},X) \hookrightarrow L^\infty(I,X)$.

Satz 3.11: (Reflexivität und Darstellung der Dualität in Bochner-Lebesgue-Räumen) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p < \infty$. Dann ist der Operator $\boldsymbol{\mathcal{I}} : L^{p'}(I, X^*) \to (L^p(I,X))^*$ mit

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{I}} \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x} \rangle_{L^p(I,X)} := \int_I \langle \boldsymbol{x}^*(s), \boldsymbol{x}(s) \rangle_X ds \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in L^p(I,X), \boldsymbol{x}^* \in L^{p'}(I,X^*)$$

ein isometrischer Isomorphismus. Im Fall $1 < p < \infty$ ist $L^p(I,X)$ insbesondere reflexiv.

Beweis: Siehe [DU77, IV., 1., Theorem 1, Corollary 2]. ■

Satz 3.12: (Charakterisierung der schwachen Konvergenz in $L^p(I,X)$) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,X)$ und $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$, dass

$$\boldsymbol{x}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{x} \text{ in } L^p(I,X)$$

genau dann, wenn

$$\int_0^t \boldsymbol{x}_n(s) ds \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \int_0^t \boldsymbol{x}(s) ds \text{ in } X$$

für alle $t \in \overline{I}$ und zusätzlich für $1 < p < \infty$ die Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,X)$ beschränkt beziehungsweise für $p = 1$ die Folge $(\|\boldsymbol{x}_n(\cdot)\|_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$ gleichgradig integrierbar ist.

Beweis: In [BT38, Theorem 4.1 und 4.2] ist diese Aussage bewiesen, falls X^* einer sogenannten Bedingung (D) genügt. In [BT38, Theorem 7.1] ist gleichzeitig zu sehen, dass diese Bedingung bereits erfüllt ist, falls X ein Banachraum ist, sodass $L^p(I,X)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv ist. Laut Satz 3.11 ist dafür die Reflexivität von X bereits hinreichend. ■

Folgerung 3.13: (Hinreichende Bedingung für schwache Konvergenz in $L^p(I,X)$) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 \leq p < \infty$ und $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,X)$ für $1 < p < \infty$ beschränkt und für $p = 1$ die Folge $(\|\boldsymbol{x}_n(\cdot)\|_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$ gleichgradig integrierbar, sodass

$$\boldsymbol{x}_n(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{x}(t) \text{ in } X$$

für fast alle $t \in I$ gilt. Dann gilt $\boldsymbol{x}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{x}$ in $L^p(I,X)$.

Beweis: Für $x^* \in X^*$ beliebig gilt

$$\langle x^*, \boldsymbol{x}_n(t) \rangle_X \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \langle x^*, \boldsymbol{x}(t) \rangle_X$$

für fast alle $t \in I$. Insbesondere folgt für $E \in \mathcal{L}^1(I)$ beliebig und $1 < p < \infty$, dass

$$\int_E |\langle x^*, \boldsymbol{x}_n(s) \rangle_X| ds \leq \|x^* \chi_E\|_{L^{p'}(I,X^*)} \|\boldsymbol{x}_n\|_{L^p(I,X)} \leq C \|x^* \chi_E\|_{L^{p'}(I,X^*)},$$

wobei die Beschränktheit von $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,X)$ ausgenutzt wurde. Im Fall $p = 1$ schätzt man die linke Seite durch $\|x^*\|_{X^*} \|\boldsymbol{x}_n \chi_E\|_{L^1(I,X)} = \|x^*\|_{X^*} \| \|\boldsymbol{x}_n(\cdot)\|_X \chi_E \|_{L^1(I)}$ ab und nutzt die

gleichgradige Integrierbarkeit von $(\|\boldsymbol{x}_n(\cdot)\|_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$. Insgesamt ist $(\langle x^*, \boldsymbol{x}_n(\cdot)\rangle_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$ gleichgradig integrierbar und der Konvergenzsatz von Vitali (cf. Lemma A.17) liefert, dass

$$\int_0^t \langle x^*, \boldsymbol{x}_n(s)\rangle_X ds \overset{n\to\infty}{\to} \int_0^t \langle x^*, \boldsymbol{x}(s)\rangle_X ds.$$

für alle $t \in \overline{I}$. Da $x^* \in X^*$ beliebig war, folgt mit Satz 3.12 die Behauptung. ■

Satz 3.14: (Linear-induzierte Operatoren zwischen Bochner-Lebesgue-Räumen) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ und $A : X \to Y$ linear und stetig. Dann ist der induzierte Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$ mit $(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x})(t) := A(\boldsymbol{x}(t))$ für fast alle $t \in I$ und alle $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$ wohldefiniert, linear und stetig. Des Weiteren gilt:

(i) $A\left(\int_I \boldsymbol{x}(s)ds\right) = \int_I (\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x})(s)ds$ in Y für alle $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$.

(ii) Ist zusätzlich $A : X \to Y$ injektiv, dann auch $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$. Das heißt insbesondere, dass die Umkehrabbildung als Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1} : R(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \to L^p(I,X)$ wohldefiniert ist und $(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{y})(t) = A^{-1}(\boldsymbol{y}(t))$ für fast alle $t \in I$ und alle $\boldsymbol{y} \in R(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ erfüllt.

(iii) Ist zusätzlich $A : X \to Y$ ein Isomorphismus, dann auch $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$.

Beweis: Für die Wohldefiniertheit, Linearität und Beschränktheit mit einschließlich Punkt (i) sei auf [Yos80, Kapitel V, 5, Folgerung 2] verwiesen. Es gilt Punkt (ii) und (iii) zu prüfen:

ad (ii) Für die Injektivität von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$ reicht es trivialen Kern nachzuweisen. Sei also $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$, sodass $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ in $L^p(I,Y)$, das heißt $0 = (\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x})(t) = A(\boldsymbol{x}(t))$ in Y für fast alle $t \in I$. Die Injektivität von $A : X \to Y$ liefert direkt, dass $\boldsymbol{x}(t) = 0$ in X für fast alle $t \in I$, also Injektivität und Wohldefiniertheit von $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1} : R(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \to L^p(I,X)$ mit

$$\boldsymbol{y}(t) = (\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{y})(t) = A((\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{y})(t)) \text{ in } Y,$$

das heißt $(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{y})(t) = A^{-1}(\boldsymbol{y}(t))$ in X, für fast alle $t \in I$ und alle $\boldsymbol{y} \in R(\boldsymbol{\mathcal{A}})$.

ad (iii) Um zu zeigen, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$ ein Isomorphismus ist, reicht es zu bemerken, dass nach Punkt (ii) $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1} : L^p(I,Y) \to L^p(I,X)$ mit $(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{y})(t) = A^{-1}(\boldsymbol{y}(t))$ für fast alle $t \in I$ und alle $\boldsymbol{y} \in L^p(I,Y)$ wohldefiniert ist. Da $A^{-1} : Y \to X$ linear und stetig ist, muss nach Punkt (i) auch $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1} : L^p(I,Y) \to L^p(I,X)$ linear und stetig sein. ■

Lemma 3.15: (Charakterisierung relativ *-schwach folgenkompakter Mengen in $L^\infty(I,X)$) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver, separabler Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(I,X)$ eine beschränkte Folge. Dann existiert ein $\boldsymbol{x} \in L^\infty(I,X)$ und eine Teilfolge $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\Lambda} \subseteq L^\infty(I,X)$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$, sodass

$$\int_I \langle \boldsymbol{x}^*(s), \boldsymbol{x}_n(s)\rangle_X ds \overset{n\to\infty}{\to} \int_I \langle \boldsymbol{x}^*(s), \boldsymbol{x}(s)\rangle_X ds \ (n \in \Lambda)$$

für alle $\boldsymbol{x}^* \in L^1(I,X^*)$. In der Folge wird für die beschriebene Konvergenz die Notation der *-schwachen Konvergenz

$$\boldsymbol{x}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{x} \text{ in } L^\infty(I,X) \ (n \to \infty, n \in \Lambda)$$

verwendet, da diese wie im Beweis verdeutlicht implizit damit beschrieben wird.

Beweis: Die Reflexivität von X sichert, dass die kanonische Isometrie $J_X : X \to X^{**}$ mit $\langle J_X x, x^* \rangle_{X^*} := \langle x^*, x \rangle_X$ für alle $x^* \in X^*$, $x \in X$ und damit gemäß Satz 3.14 (iii) auch der durch die Vorschrift $(\boldsymbol{J}_X \boldsymbol{x})(t) := J_X(\boldsymbol{x}(t))$ linear-induzierte Operator $\boldsymbol{J}_X : L^\infty(I, X) \to L^\infty(I, X^{**})$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Nun ist auch $(\boldsymbol{J}_X \boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(I, X^{**})$ beschränkt und $L^\infty(I, X^{**})$ gemäß Satz 3.11 isometrisch isomorph zu $(L^1(I, X^*))^*$. Da $L^1(I, X^*)$ gemäß Satz 3.9 ein separabler Banachraum ist, liefert nun Satz A.6 eine Teilfolge $(\boldsymbol{J}_X \boldsymbol{x}_n)_{n\in\Lambda} \subseteq L^\infty(I, X^{**})$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ und ein $\boldsymbol{x} \in L^\infty(I, X)$, sodass

$$\boldsymbol{J}_X \boldsymbol{x}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{J}_X \boldsymbol{x} \text{ in } L^\infty(I, X^{**}) \ (n \to \infty, n \in \Lambda).$$

Mit der Definition der kanonischen Isometrie entspricht dies bereits der beschriebenen Konvergenzeigenschaft. ■

Bemerkung 3.16: (Induzierte kompatible Paare) Sei $(X, Y) = (X, Y, Z, e_X, e_Y)$ ein kompatibles Paar, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \le p, q \le \infty$. In Lemma 2.7 wurde bereits nachgewiesen, dass $e_X(X) + e_Y(Y) \subseteq Z$ versehen mit der Norm

$$\|z\|_{e_X(X)+e_Y(Y)} = \inf_{\substack{x\in X, y\in Y \\ z = e_X x + e_Y y}} \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

einen Banachraum definiert. Dann sind

$$e_X : X \to e_X(X) + e_Y(Y) \text{ und } e_Y : Y \to e_X(X) + e_Y(Y)$$

Einbettungen und damit laut Satz 3.14 (ii) auch die linear-induzierten Operatoren

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_X &: L^p(I, X) \to L^1(I, e_X(X) + e_Y(Y)) \text{ mit } (\boldsymbol{e}_X \boldsymbol{x})(t) := e_X(\boldsymbol{x}(t)), \\ \boldsymbol{e}_Y &: L^q(I, Y) \to L^1(I, e_X(X) + e_Y(Y)) \text{ mit } (\boldsymbol{e}_Y \boldsymbol{y})(t) := e_Y(\boldsymbol{y}(t)). \end{aligned}$$

Folglich sind

$$\begin{aligned} (L^p(I, X), L^q(I, Y)) &= (L^p(I, X), L^q(I, Y), L^1(I, e_X(X) + e_Y(Y)), \boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y), \\ (L^p(I, X), C^0(\overline{I}, Y)) &= (L^p(I, X), C^0(\overline{I}, Y), L^1(I, e_X(X) + e_Y(Y)), \boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y \mathrm{id}_{C^0(\overline{I},Y)}) \end{aligned}$$

kompatible Paare. Für $\boldsymbol{j} := \boldsymbol{e}_Y^{-1} \boldsymbol{e}_X$ sind außerdem

$$\begin{aligned} L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, Y) \text{ und } \boldsymbol{j} : L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, Y) \to L^q(I, Y), \\ L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) \text{ und } \boldsymbol{j} : L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) \to C^0(\overline{I}, Y) \end{aligned}$$

wohldefiniert.

Satz 3.17: (Alternative Darstellung von $L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$) Ist (X, Y) ein kompatibles Paar, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \le p \le \infty$. Dann ist

$$(L^p(I, X \cap_j Y), C^0(\overline{I}, Y)) = (L^p(I, X \cap_j Y), C^0(\overline{I}, Y), L^p(I, Y), \boldsymbol{j}, \mathrm{id}_{C^0(\overline{I},Y)})$$

ein kompatibles Paar und

$$L^p(I, X \cap_j Y) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) \text{ und } \boldsymbol{j} : L^p(I, X \cap_j Y) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) \to C^0(\overline{I}, Y),$$

wobei $\boldsymbol{j}$ wie in Bemerkung 3.16 definiert ist, wohldefiniert. Insbesondere gilt die Mengengleichheit $L^p(I, X \cap_j Y) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) = L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$ mit der Normäquivalenz

$$\|\cdot\|_{L^p(I,X)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)} \leq \|\cdot\|_{L^p(I,X\cap_j Y)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)} \leq (1 + T^{\frac{1}{p}})\|\cdot\|_{L^p(I,X)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)},$$

wobei $T^{\frac{1}{p}} := 1$ im Fall $p = \infty$ zu setzen ist.

Beweis: Für $\boldsymbol{x} \in L^p(I, X)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$ ist $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{j}\boldsymbol{x})$ Bochner-messbar mit Werten im abgeschlossenen Graphen $G(j)$. Der isometrische Isomorphismus aus Satz 2.8 liefert daher $\boldsymbol{x} \in L^p(I, X \cap_j Y)$. Da $j : X \cap_j Y \to Y$ eine Einbettung definiert, ist auch $\boldsymbol{j} : L^p(I, X \cap_j Y) \to L^p(I, Y)$ mit $(\boldsymbol{j}\boldsymbol{x})(t) := j(\boldsymbol{x}(t))$ gemäß Satz 3.14 (ii) eine Einbettung und damit

$$(L^p(I, X \cap_j Y), C^0(\overline{I}, Y)) = (L^p(I, X \cap_j Y), C^0(\overline{I}, Y), L^p(I, Y), \boldsymbol{j}, \mathrm{id}_{C^0(\overline{I},Y)})$$

ein kompatibles Paar. Insbesondere sind deshalb

$$L^p(I, X \cap_j Y) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) \text{ und } \boldsymbol{j} : L^p(I, X \cap_j Y) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) \to C^0(\overline{I}, Y)$$

wohldefiniert. Nach Satz 3.14 (ii) gilt außerdem, dass $(\boldsymbol{j}^{-1}\boldsymbol{y})(t) = j^{-1}(\boldsymbol{y}(t)) = e_X^{-1}e_Y(\boldsymbol{y}(t)) = (\boldsymbol{e}_X^{-1}\boldsymbol{e}_Y\boldsymbol{y})(t)$ für fast alle $t \in I$ und alle $\boldsymbol{y} \in R(\boldsymbol{j}) = R(\boldsymbol{e}_Y^{-1}\boldsymbol{e}_X)$ und damit nach Definition 2.3, dass

$$\begin{aligned}
L^p(I, X \cap_j Y) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) &= \boldsymbol{j}^{-1}(R(\boldsymbol{j}) \cap C^0(\overline{I}, Y)) \\
&= \boldsymbol{e}_X^{-1}\boldsymbol{e}_Y(R(\boldsymbol{j}) \cap C^0(\overline{I}, Y)) \\
&= \boldsymbol{e}_X^{-1}(R(\boldsymbol{e}_Y\boldsymbol{j}) \cap R(\boldsymbol{e}_Y \mathrm{id}_{C^0(\overline{I},Y)})) \\
&= \boldsymbol{e}_X^{-1}(R(\boldsymbol{e}_X) \cap R(\boldsymbol{e}_Y \mathrm{id}_{C^0(\overline{I},Y)})) \\
&= L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y).
\end{aligned}$$

Dabei wurde im vierten Gleichheitszeichen davon Gebrauch gemacht, dass für eine Einbettung A und Mengen N, M die Identität $A(M \cap N) = A(N) \cap A(M)$ gilt. Offensichtlich ist

$$\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)} \leq \|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X\cap_j Y)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)}$$

für alle $\boldsymbol{x} \in L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$. Schließlich gilt mit

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X\cap_j Y)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)} &= \left(\int_I (\|\boldsymbol{x}(s)\|_X + \|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{x})(s)\|_Y)^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \|\boldsymbol{j}\boldsymbol{x}\|_{C^0(\overline{I},Y)} \\
&\leq \left(\int_I \|\boldsymbol{x}(s)\|_X^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I \|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{x})(s)\|_Y^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \|\boldsymbol{j}\boldsymbol{x}\|_{C^0(\overline{I},Y)} \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)} + (1 + T^{\frac{1}{p}})\|\boldsymbol{j}\boldsymbol{x}\|_{C^0(\overline{I},Y)} \\
&\leq (1 + T^{\frac{1}{p}})\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)}
\end{aligned}$$

im Fall $p < \infty$ und $\|\boldsymbol{x}\|_{L^\infty(I,X\cap_j Y)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)} \leq 2\|\boldsymbol{x}\|_{L^\infty(I,X)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)}$ die angegebene Normäquivalenz. ∎

Bemerkung 3.18: Sei (X, Y) ein kompatibles Paar, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p \leq \infty$.

(i) Man erhält nun die handliche Charakterisierung

$$L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) = \{\boldsymbol{x} \in L^p(I, X \cap_j Y) \mid \boldsymbol{jx} \in C^0(\overline{I}, Y)\},$$

die insbesondere direkt $X \cap_j Y$-wertige Bochner-Messbarkeit enthält. Man sieht damit auch leicht ein, dass die Einbettung

$$C^0(\overline{I}, X \cap_j Y) \hookrightarrow L^p(I, X \cap_j Y) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) = L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$$

gilt.

(ii) Analog zeigt man auch für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ die Mengengleichheit

$$L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, Y) = L^p(I, X \cap_j Y) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, Y) = \{\boldsymbol{x} \in L^p(I, X \cap_j Y) \mid \boldsymbol{jx} \in L^q(I, Y)\}$$

mit Normäquivalenz

$$\|\cdot\|_{L^p(I,X)\cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,Y)} \leq \|\cdot\|_{L^p(I,X\cap_j Y)\cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,Y)} \leq (1 + T^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})\|\cdot\|_{L^p(I,X)\cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,Y)},$$

wobei $1/\infty := 0$ zu setzen ist. Damit ergibt sich insbesondere für $q \geq r \geq p$ die topologische Ordnung

$$L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y) \hookrightarrow L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, Y) \hookrightarrow L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} L^r(I, Y).$$

(iii) Gemäß Lemma 3.10 ist $C^0_\omega(\overline{I}, Y) \subseteq L^\infty(I, Y)$. Man definiert entsprechend Punkt (i) den linearen Unterraum

$$\begin{aligned} L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0_\omega(\overline{I}, Y) &:= \{\boldsymbol{x} \in L^p(I, X \cap_j Y) \mid \boldsymbol{jx} \in C^0_\omega(\overline{I}, Y)\} \\ &\subseteq L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, Y) \end{aligned}$$

Dann ist der Operator $\boldsymbol{j} : L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0_\omega(\overline{I}, Y) \to C^0_\omega(\overline{I}, Y)$ wohldefiniert und injektiv.

Lemma 3.19: Sei (X, Y) ein kompatibles Paar mit reflexivem X, $I := (0, T)$ und $0 < T < \infty$. Dann gilt die Mengengleichheit

$$C^0_\omega(\overline{I}, X \cap_j Y) = L^\infty(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0_\omega(\overline{I}, Y).$$

Beweis: Gemäß der Definition in Bemerkung 3.18 (iii) und der Mengengleichheit $X \cap_j Y = (X \cap_j Y) \cap_j Y$ mit Normäquivalenz (cf. Bemerkung 2.5 (i)) gilt die Mengengleichheit

$$L^\infty(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0_\omega(\overline{I}, Y) = L^\infty(I, X \cap_j Y) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0_\omega(\overline{I}, Y).$$

Für zusätzlich separables X könnte nun auf [BF13, Lemma II.5.9.] verwiesen werden. Der dortige Beweis kommt jedoch für die Mengeninklusion $L^\infty(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0_\omega(\overline{I}, Y) \subseteq C^0_\omega(\overline{I}, X \cap_j Y)$ ohne Separabilität von X aus, sodass für diese Inklusionsrichtung darauf verwiesen sei. Die umgekehrte Mengeninklusion ergibt sich ebenfalls aus der obigen Mengengleichheit zusammen mit $C^0_\omega(\overline{I}, X \cap_j Y) \subseteq L^\infty(I, X \cap_j Y)$ (cf. Lemma 3.10) und der offensichtlichen Mengeninklusion

$$\boldsymbol{j}(C^0_\omega(\overline{I}, X \cap_j Y)) \subseteq C^0_\omega(\overline{I}, Y). \qquad \blacksquare$$

Lemma 3.20: Sei (X, Y) ein kompatibles Paar mit reflexivem X, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$ und $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0_\omega(\overline{I}, Y) = C^0_\omega(\overline{I}, X \cap_j Y)$ in $L^\infty(I, X)$ beschränkt. Dann gilt

$$(\boldsymbol{j}\boldsymbol{x}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{j}\boldsymbol{x})(t) \text{ in } Y \text{ für alle } t \in \overline{I}$$

genau dann, wenn

$$\boldsymbol{x}_n(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{x}(t) \text{ in } X \cap_j Y \text{ für alle } t \in \overline{I}.$$

Beweis: Es reicht die Hinrichtung zu zeigen. Hierzu nutzt man, dass nach Voraussetzung

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{x}_n(t)\|_X < \infty \text{ und } (\boldsymbol{j}\boldsymbol{x}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{j}\boldsymbol{x})(t) \text{ in } Y$$

für alle $t \in \overline{I}$. Dann folgt die Behauptung, indem man Lemma 2.10 für alle $t \in \overline{I}$ auf die Folge $(\boldsymbol{x}_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \cap_j Y$ anwendet. ■

Folgerung 3.21: (Charakterisierung der schwachen Konvergenz in $L^p(I, X)\cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$) Sei (X, Y) ein kompatibles Paar mit reflexivem X, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p < \infty$. Dann gilt für $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$ und $\boldsymbol{x} \in L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$, dass

$$\boldsymbol{x}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{x} \text{ in } L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$$

genau dann, wenn $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$ beschränkt ist und

$$(\boldsymbol{j}\boldsymbol{x}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{j}\boldsymbol{x})(t) \text{ in } Y$$

für alle $t \in \overline{I}$.

Beweis:

(⇒) Folgt aus der Charakterisierung der schwachen Konvergenz in Schnitten (cf. Satz 2.8) sowie in $C^0(\overline{I}, Y)$ (cf. Satz 3.3).

(⇐) Sei $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y)$ beschränkt. Satz 3.3 liefert direkt, dass

$$\boldsymbol{j}\boldsymbol{x}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{j}\boldsymbol{x} \text{ in } C^0(\overline{I}, Y).$$

Mit der Reflexivität von $L^p(I, X)$ (cf. Satz 3.11) und Lemma 2.10 folgt dann, dass

$$\boldsymbol{x}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{x} \text{ in } L^p(I, X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, Y).$$ ■

4 Distributionelle Zeitableitung

Im Folgenden wird die distributionelle Zeitableitung eingeführt. Dabei beschränkt sich diese Arbeit auf die sogenannte reguläre distributionelle Zeitableitung, die für Evolutionsgleichungen vollkommen ausreichend ist. Auf eine genaue Einführung in den Begriff der vektorwertigen Distribution wird deshalb verzichtet. Es sei allerdings auf den Zusammenhang hingewiesen, wie er beispielsweise in [GGZ74, Kap. V] dargestellt ist. Der Zusatz „regulär“ wird im Folgenden weggelassen. Wie üblich bezeichne $C_0^\infty(I)$ den Raum der glatten Testfunktionen mit in I kompakt enthaltenem Träger.

Definition 4.1: (Distributionelle Zeitableitung bezüglich Einbettung) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, sodass eine Einbettung $j : X \to Y$ existiert, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann besitzt $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$ eine **distributionelle Zeitableitung bezüglich** j in $L^q(I,Y)$, falls ein $\tilde{\boldsymbol{x}} \in L^q(I,Y)$ existiert, sodass

$$j\left(-\int_I \boldsymbol{x}(s)\varphi\prime(s)ds\right) = \int_I \tilde{\boldsymbol{x}}(s)\varphi(s)ds \text{ in } Y$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$ gilt. Man definiert dann $\frac{d_j \boldsymbol{x}}{dt} := \tilde{\boldsymbol{x}}$. Im Fall $X \subseteq Y$ sowie $j = \mathrm{id}_X$ schreibt man einfach $\frac{d_X}{dt} := \frac{d_{\mathrm{id}_X}}{dt}$.

Bemerkung 4.2: (Eigenschaften von $\frac{d_j}{dt}$)

(i) Wohldefiniertheit: Das auch für Bochner-Lebesgue-Funktionen geltende Fundamentallemma der Variationsrechnung, wie in [GGZ74, Kap. IV, Lemma 1.7] bewiesen, sichert die Eindeutigkeit der distributionellen Zeitableitung, also mithin deren Wohldefiniertheit.

(ii) Konsistenz: Für $\boldsymbol{x} \in C^1(\overline{I}, X)$ gilt $\frac{d_j \boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{x}\prime$ (cf. [GGZ74, Kap. IV, Bemerkung 1.16]).

Definition 4.3: (Bochner-Sobolev-Raum bezüglich Einbettung) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, sodass eine Einbettung $j : X \to Y$ existiert, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann heißt

$$W_j^{1,p,q}(I,X,Y) := \left\{ \boldsymbol{x} \in L^p(I,X) \,\middle|\, \exists \frac{d_j \boldsymbol{x}}{dt} \in L^q(I,Y) \right\}$$

Bochner-Sobolev-Raum bezüglich j. Man schreibt der Einfachheit halber $W^{1,p,q}(I,X) := W_{\mathrm{id}_X}^{1,p,q}(I,X,X)$ und $W_j^{1,p}(I,X,Y) := W_j^{1,p,p}(I,X,Y)$.

Bemerkung 4.4: Mit der Integralidentität aus Satz 3.14 (i) gilt in Definition 4.1

$$j\left(-\int_I \boldsymbol{x}(s)\varphi\prime(s)ds\right) = -\int_I (\boldsymbol{j}\boldsymbol{x})(s)\varphi\prime(s)ds \text{ in } Y$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{j}$ den durch j gemäß Satz 3.14 linear-induzierten Operator. Damit sieht man leicht ein, dass für ein $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$ genau dann $\boldsymbol{x} \in W_j^{1,p,q}(I,X,Y)$ gilt, wenn

$\boldsymbol{jx} \in W^{1,p,q}(I,Y)$. Dann gilt insbesondere

$$\frac{d_j \boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d_Y \boldsymbol{jx}}{dt} \text{ in } L^q(I,Y).$$

Lemma 4.5: (Vollständigkeit) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, sodass eine Einbettung $j : X \to Y$ existiert, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p,q \leq \infty$. Dann ist $W_j^{1,p,q}(I,X,Y)$ versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_{W_j^{1,p,q}(I,X,Y)} := \|\cdot\|_{L^p(I,X)} + \left\| \frac{d_j}{dt} \cdot \right\|_{L^q(I,Y)}$$

ein Banachraum.

Beweis: Siehe [BF13, Lemma II.5.10]. ■

Lemma 4.6: (Linear-induzierte Operatoren zwischen Bochner-Sobolev-Räumen) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $A : X \to Y$ linear und stetig, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Dann ist $\boldsymbol{\mathcal{A}} : W^{1,p,q}(I,X) \to W^{1,p,q}(I,Y)$ mit $(\boldsymbol{\mathcal{A}x})(t) := A(\boldsymbol{x}(t))$ für fast alle $t \in I$ wohldefiniert, linear und stetig. Außerdem gilt für alle $\boldsymbol{x} \in W^{1,p,q}(I,X)$ die Identität

$$\frac{d_Y \boldsymbol{\mathcal{A}x}}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \frac{d_X \boldsymbol{x}}{dt} \text{ in } L^q(I,Y).$$

Ist $A : X \to Y$ ein Isomorphismus, dann auch $\boldsymbol{\mathcal{A}} : W^{1,p,q}(I,X) \to W^{1,p,q}(I,Y)$.

Beweis: Für $\boldsymbol{x} \in W^{1,p,q}(I,X)$ gilt unter Anwendung von Satz 3.14 (i) und Definition 4.1, dass

$$\begin{aligned} -\int_I (\boldsymbol{\mathcal{A}x})(s)\varphi\prime(s)ds &= A\left(-\int_I \boldsymbol{x}(s)\varphi\prime(s)ds\right) \\ &= A\left(\int_I \frac{d_X \boldsymbol{x}}{dt}(s)\varphi(s)ds\right) = \int_I \left(\boldsymbol{\mathcal{A}} \frac{d_X \boldsymbol{x}}{dt}\right)(s)\varphi(s)ds \text{ in } Y \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$, das heißt $\frac{d_Y \boldsymbol{\mathcal{A}x}}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \frac{d_X \boldsymbol{x}}{dt}$ in $L^q(I,Y)$. Also ist $\boldsymbol{\mathcal{A}} : W^{1,p,q}(I,X) \to W^{1,p,q}(I,Y)$ wohldefiniert. Da $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^r(I,X) \to L^r(I,Y)$ für alle $1 \leq r \leq \infty$ stetig ist (cf. Satz 3.14), folgt zusammen mit $\frac{d_Y \boldsymbol{\mathcal{A}x}}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \frac{d_X \boldsymbol{x}}{dt}$ in $L^q(I,Y)$ für alle $\boldsymbol{x} \in W^{1,p,q}(I,X)$ die Stetigkeit von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : W^{1,p,q}(I,X) \to W^{1,p,q}(I,Y)$. Die Isomorphieeigenschaft überträgt sich wie in Satz 3.14. ■

Lemma 4.7: (Verallgemeinerter Volterra-Operator) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist der **verallgemeinerte Volterra-Operator**

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} : L^p(I,X) \to W^{1,p}(I,X) \text{ mit } (\boldsymbol{\mathcal{V}x})(t) := \int_0^t \boldsymbol{x}(s)ds \text{ für } t \in \overline{I}$$

eine stetige Rechtsinverse von $\frac{d_X}{dt} : W^{1,p}(I,X) \to L^p(I,X)$.

Beweis: Die Linearität ist evident. Wohldefiniertheit und Rechtsinverseneigenschaft folgen aus [GGZ74, Kap. IV, Lemma 1.8]. Für $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$ folgt für $p < \infty$, dass

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{x}\|_{W^{1,p}(I,X)} &= \|\boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)} + \left\|\frac{d_X \boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{x}}{dt}\right\|_{L^p(I,X)} \\
&\leq \left(\int_I \left(\int_0^t \|\boldsymbol{x}(s)\|_X \, ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)} \\
&\leq \left(\int_I \left(\int_I \|\boldsymbol{x}(s)\|_X \, ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)} \\
&= T^{\frac{1}{p}} \|\boldsymbol{x}\|_{L^1(I,X)} + \|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)} \leq (1+T)\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)}
\end{aligned}$$

Für $p = \infty$ gilt dieselbe Abschätzung mit der Supremumsnorm. ■

Satz 4.8: (Hauptsatz für Bochner-Sobolev-Funktionen) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann existiert genau eine Auswahlfunktion

$$\{\cdot\}_X : W^{1,p,q}(I,X) \to C^0(\overline{I},X) \text{ mit } \{\boldsymbol{x}\}_X \in \boldsymbol{x} \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in W^{1,p,q}(I,X),$$

die eine Einbettung definiert. Außerdem gilt

$$\{\boldsymbol{x}\}_X(t) = \{\boldsymbol{x}\}_X(t') + \int_{t'}^t \frac{d_X \boldsymbol{x}}{dt}(s) ds \text{ in } X$$

für alle $t', t \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$.

Beweis: Siehe [BF13, Lemma II.5.11]. ■

Auch hier wird in der Folge häufig nicht zwischen der Klasse und dem stetigen Repräsentanten unterschieden. Man schreibt deshalb der Einfachheit halber $\boldsymbol{x}$ statt $\{\boldsymbol{x}\}_X$ und entsprechend

$$W^{1,p,q}(I,X) \hookrightarrow C^0(\overline{I},X).$$

Dabei gilt dennoch wieder, dass Punktauswertung dieser Klassen im Sinne des stetigen Repräsentanten zu verstehen ist.

Bemerkung 4.9: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p, q \leq \infty$.

(i) Nach Satz 4.8 gilt die Mengengleichheit $W^{1,p,q}(I,X) = W^{1,q}(I,X)$ mit Normäquivalenz, weshalb in der Folge immer $W^{1,q}(I,X)$ für $W^{1,p,q}(I,X)$ geschrieben wird.

(ii) Ist $j : X \to Y$ eine Einbettung, dann sieht man mit der alternativen Charakterisierung von $L^p(I,X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)$ (cf. Bemerkung 3.18 (i)), $\boldsymbol{j}(W_j^{1,p,q}(I,X,Y)) \subseteq W^{1,p,q}(I,Y)$ (cf. Bemerkung 4.4) und $W^{1,p,q}(I,Y) \hookrightarrow C^0(\overline{I},Y)$ leicht ein, dass $W_j^{1,p,q}(I,X,Y) \hookrightarrow L^p(I,X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)$.

Satz 4.10: (Starke Stetigkeit der Auswahlfunktion) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum mit $\dim X < \infty$, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq q \leq \infty$. Dann ist die Auswahlfunktion aus Satz 4.8 stark stetig und für $1 < q \leq \infty$ nach Arzelà–Ascoli insbesondere kompakt.

Beweis: Aufgrund der Linearität reicht es starke Stetigkeit in $\mathbf{0} \in W^{1,q}(I,X)$ nachzuweisen. Sei also $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,q}(I,X)$ schwach konvergent gegen $\mathbf{0}$. Da die Operatoren

$$(\boldsymbol{x} \mapsto \{\boldsymbol{x}\}_X(0)) : W^{1,q}(I,X) \to X \text{ und } \frac{d_X}{dt} : W^{1,q}(I,X) \to L^q(I,X)$$

linear und stetig sind, gilt

$$\{\boldsymbol{x}_n\}_X(0) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0 \text{ in } X \hookrightarrow\hookrightarrow X \text{ und } \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt} \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{0} \text{ in } L^q(I,X).$$

Aufgrund der Kompaktheit von $\overline{I}$ existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{I}$, die ohne Einschränkung stark gegen ein $t^* \in \overline{I}$ konvergiert (Sonst geht man zu einer Teilfolge über und verwendet das Teilfolgenargument Lemma A.1, um eine Aussage für die gesamte Folge zu erhalten), sodass

$$\|\{\boldsymbol{x}_n\}_X\|_{C^0(\overline{I},X)} = \max_{t\in\overline{I}} \|\{\boldsymbol{x}_n\}_X(t)\|_X = \|\{\boldsymbol{x}_n\}_X(t_n)\|_X.$$

Sei nun $x^* \in X^*$ beliebig. Für $q > 1$ ist $(x^*\chi_{[0,t_n]})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^{q'}(I,X^*)$ stark konvergent gegen $x^*\chi_{[0,t^*]} \in L^{q'}(I,X^*)$, sodass mit der Integralidentität in Satz 3.14 (i) und unter Beachtung der Darstellung der Dualität in Bochner-Lebesgue-Räumen (cf. Satz 3.11) folgt, dass

$$\left\langle x^*, \int_0^{t_n} \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt}(s)ds \right\rangle_X = \int_0^{t_n} \left\langle x^*, \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt}(s) \right\rangle_X ds = \left\langle x^*\chi_{[0,t_n]}, \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt} \right\rangle_{L^q(I,X)} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Für $q = 1$ ist $(\frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I,X)$ gleichgradig integrierbar (cf. Satz 3.12), sodass folgt

$$\begin{aligned}\left\langle x^*, \int_0^{t_n} \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt}(s)ds \right\rangle_X &= \left\langle x^*, (-1)^{\min\{\operatorname{sgn}(t_n - t^*),0\}} \int_{\min\{t_n,t^*\}}^{\max\{t_n,t^*\}} \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt} ds + \int_0^{t^*} \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt}(s)ds \right\rangle_X \\ &\leq \|x^*\|_{X^*} \int_{\min\{t_n,t^*\}}^{\max\{t_n,t^*\}} \left\| \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt}(s) \right\|_X ds + \left\langle x^*\chi_{[0,t^*]}, \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt} \right\rangle_{L^1(I,X)} \\ &\overset{n\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Die Integraldarstellung in Satz 4.8 zusammen mit der Konvergenz der Anfangswerte liefert dann

$$\{\boldsymbol{x}_n\}_X(t_n) = \{\boldsymbol{x}_n\}_X(0) + \int_0^{t_n} \frac{d_X \boldsymbol{x}_n}{dt}(s)ds \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0 \text{ in } X \hookrightarrow\hookrightarrow X.$$

Schließlich gilt $\|\{\boldsymbol{x}_n\}_X\|_{C^0(\overline{I},X)} = \|\{\boldsymbol{x}_n\}_X(t_n)\|_X \overset{n\to\infty}{\to} 0.$ ■

Folgerung 4.11: (Kompakte Einbettung) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume mit $\dim X < \infty$, sodass eine Einbettung $j : X \to Y$ existiert, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p,q \leq \infty$. Dann ist die Einbettung

$$\mathrm{id}_{W^{1,q}(I,X)} : W^{1,q}(I,X) \to L^p(I,X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)$$

stark stetig und für $1 < q \leq \infty$ nach Arzelà–Ascoli insbesondere kompakt.

Beweis: Folgt aus Satz 4.10 mit $C^0(\overline{I},X) \hookrightarrow L^p(I,X) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I},Y)$ (cf. Bemerkung 3.18 (i)). ■

5 Verallgemeinerte Evolutionsgleichungen

Definition 5.1: (Evolutionstripel) Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum, $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum und $j : V \to H$ eine Einbettung, sodass $R(j)$ dicht in H liegt. Dann heißt die Struktur (V, H, j) **Evolutionstripel**.

Lemma 5.2: (kanonische Einbettung) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $R : H \to H^*$ der Riesz-Isomorphismus. Dann ist $e := j^*Rj : V \to V^*$ eine Einbettung und es gilt

$$\langle ev, w\rangle_V = (jv, jw)_H$$

für alle $v, w \in V$. Bezeichne im Folgenden e als die **kanonische Einbettung** von (V, H, j).

Beweis: Satz A.12 (iii) liefert, dass $N(j^*)^\perp = \overline{R(j)}^{\|\cdot\|_H} = H$. Damit sind $j^* : H^* \to V^*$ und $e := j^*Rj : V \to V^*$ Einbettungen. Die angegebene Identität ergibt sich aus der Definition. ■

Bemerkung 5.3: (Energieräume) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$ und $p \le q \le \infty$. Bezeichnen weiter $\boldsymbol{j} : L^p(I, V) \to L^p(I, H)$ und $\boldsymbol{e} : L^p(I, V) \to L^p(I, V^*)$ die durch j beziehungsweise e gemäß Satz 3.14 linear-induzierten Operatoren. Nach Bemerkung 2.5 (i) ist (V, H) ein kompatibles Paar. Bemerkung 3.16 liefert dann, dass auch

$$(L^p(I, V), L^q(I, H)) := (L^p(I, V), L^q(I, H), L^1(I, H), \boldsymbol{j}, \mathrm{id}_{L^q(I,H)})$$

ein kompatibles Paar definiert sowie

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, H) \text{ und } \boldsymbol{j} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \to L^q(I, H)$$

wohldefiniert sind. Sei weiter $\boldsymbol{\mathcal{X}'} := L^{p'}(I, V^*) +_{\boldsymbol{j}^*} L^{q'}(I, H^*) \hookrightarrow L^{q'}(I, V^*)$ im Sinne von Folgerung 2.11. Dann ist für reflexives V und $q < \infty$ gemäß Satz 2.8 (iii) $\boldsymbol{\mathcal{X}'} = \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ und für $q = \infty$ zumindest $\boldsymbol{\mathcal{X}'} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$. Des Weiteren ist für $\boldsymbol{\mathcal{Y}} := C^0(\overline{I}, H)$

$$(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}) := (\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}, L^1(I, H), \boldsymbol{j}, \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}})$$

ein kompatibles Paar sowie

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \text{ und } \boldsymbol{j} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{Y}}$$

wohldefiniert. Gemäß Bemerkung 2.5 (i)-(iii) und Lemma 2.6 gilt die Mengengleichheit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} &= (L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, H)) \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \\ &\overset{(2.6)}{=} L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} (L^q(I, H) \cap \boldsymbol{\mathcal{Y}}) \\ &\overset{(2.5)(ii)}{=} L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} (\boldsymbol{\mathcal{Y}} \cap L^q(I, H)) \\ &\overset{(2.5)(i)}{=} L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}\end{aligned}$$

mit Normäquivalenz, sodass man diese Räume im Wesentlichen miteinander identifizieren kann. Wenn man in der Folge einen Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ betrachtet, dann ist damit für reflexives V und $q < \infty$ indirekt ein Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} C^0(\overline{I}, H) \to L^{p'}(I, V^*) +_{\boldsymbol{j}^*} L^{q'}(I, H^*)$ in

der gewünschten Form aus der Einleitung gemeint. Die hier gewählte Sichtweise $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ermöglicht allerdings einen leichteren Zugang zu den Begriffen aus Kapitel 2, sodass man weitestgehend dieser folgt. Definiere schließlich

$$\boldsymbol{\mathcal{W}} := \left\{ \boldsymbol{v} \in W_e^{1,p,q'}(I,V,V^*) \middle| \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}, \frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}' \right\}.$$

Lemma 5.4: (Alternative Charakterisierung von $\boldsymbol{\mathcal{W}}$) Ist (V,H,j) ein Evolutionstripel, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $p \le q \le \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ wie in Bemerkung 5.3. Dann ist $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ genau dann, wenn $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ und ein $\tilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}'$ existiert, sodass für eine dichte Teilmenge $D \subseteq V$ und alle $w \in D$, $\varphi \in C_0^\infty(I)$ gilt, dass

$$-\int_I (j(\boldsymbol{v}(s)), jw)_H \varphi'(s) ds = \langle \tilde{\boldsymbol{v}}, w\varphi \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \int_I \langle \tilde{\boldsymbol{v}}(s), w \rangle_V \varphi(s) ds.$$

Beweis: Bezeichne $J_V : V \to V^{**}$ die kanonische Isometrie. Dann ist $\langle \cdot, w \rangle_V = \langle J_V w, \cdot \rangle_{V^*} \in V^{**}$ für beliebiges $w \in V$. Mit der Integralidentität aus Satz 3.14 (i) und der Identität aus Lemma 5.2 gilt dann

$$\int_I ((\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(s), jw)_H \varphi'(s) ds = \int_I \langle (\boldsymbol{e}\boldsymbol{v})(s), w \rangle_V \varphi'(s) ds = \left\langle e\left(\int_I \boldsymbol{v}(s) \varphi'(s) ds \right), w \right\rangle_V$$
$$\text{und} \quad \int_I \langle \tilde{\boldsymbol{v}}(s), w \rangle_V \varphi(s) ds = \left\langle \int_I \tilde{\boldsymbol{v}}(s) \varphi(s) ds, w \right\rangle_V$$

für alle $w \in D$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Mit der Dichtheit von D in V gilt schließlich

$$e\left(-\int_I \boldsymbol{v}(s) \varphi'(s) ds \right) = \int_I \tilde{\boldsymbol{v}}(s) \varphi(s) ds \text{ in } V^*$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$, das heißt $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ mit $\frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{v}}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}'$ (cf. Definition 4.1), genau dann, wenn die obige Identität erfüllt ist. ■

Satz 5.5: (Eigenschaften von $\boldsymbol{\mathcal{W}}$) Sei (V,H,j) ein Evolutionstripel, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $p \le q \le \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ wie in Bemerkung 5.3. Dann gilt:

(i) Versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathcal{W}}} := \|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \left\| \frac{d_e}{dt} \cdot \right\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}'}$$

ist $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ ein Banachraum.

(ii) $C^\infty(\overline{I}, V)$ liegt dicht in $\boldsymbol{\mathcal{W}}$.

(iii) Es gilt die dichte Einbettung $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{\mathcal{W}} \to \boldsymbol{\mathcal{Y}}$. Insbesondere ist $\boldsymbol{\mathcal{W}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ dicht.

(iv) Es gilt die **verallgemeinerte partielle Integrationsformel**

$$\left\langle \frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{w} \chi_{[t',t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = [((\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(s), (\boldsymbol{j}\boldsymbol{w})(s))_H]_{s=t'}^{s=t} - \left\langle \frac{d_e \boldsymbol{w}}{dt}, \boldsymbol{v} \chi_{[t',t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $t, t' \in \overline{I}$ mit $t' \le t$ und $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$.

Beweis: In [GGZ74, Kapitel IV, Sätze 1.16 und 1.17] ist die Aussage für den Fall $q < \infty$ sowie separables und reflexives V bereits bewiesen. Der dortige Beweis funktioniert für allgemeines V aber analog, sodass trotzdem auf diesen verwiesen sei und hier nur der Fall $q = \infty$ geprüft wird. Die Banachraumeigenschaft folgt ebenfalls analog und damit Punkt (i). Für die Einbettung $\boldsymbol{\mathcal{W}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und die verallgemeinerte partielle Integrationsformel im Fall $q = \infty$ nutzt man wie dort, dass zu $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ eine Folge $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{I}, V)$ existiert, sodass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_n &\overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{v} \text{ in } L^p(I,V), \\ \frac{d_e \boldsymbol{v}_n}{dt} &\overset{n\to\infty}{\to} \frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}', \\ \|\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n\|_{L^\infty(I,H)} &\leq \|\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(I,H)} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Konstruktion dieser Folge sei ebenfalls auf [GGZ74, Kapitel IV, Lemma 1.12] oder [BF13, Remark II.5.3.] verwiesen. Offensichtlich gilt für alle $t, t' \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$ und $n, m \in \mathbb{N}$, dass

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n)(t) - (\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_m)(t)\|_H^2 = \frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n)(t') - (\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_m)(t')\|_H^2 + \left\langle \frac{d_e \boldsymbol{v}_n}{dt} - \frac{d_e \boldsymbol{v}_m}{dt}, (\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_m)\chi_{[t',t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}.$$

Mit der Ungleichung $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ für $a, b \geq 0$ folgert man weiter, dass

$$\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n)(t) - (\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_m)(t)\|_H \leq \|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n)(t') - (\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_m)(t')\|_H + \sqrt{2\left\|\frac{d_e \boldsymbol{v}_n}{dt} - \frac{d_e \boldsymbol{v}_m}{dt}\right\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}'} \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_m\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Bilden des Mittelwerts bezüglich $t' \in \overline{I}$ und anschließend des Supremums über $t \in \overline{I}$ auf der linken Seite liefert schließlich

$$\|\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_m\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq \frac{1}{T}\|\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_m\|_{L^1(I,H)} + \sqrt{2\left\|\frac{d_e \boldsymbol{v}_n}{dt} - \frac{d_e \boldsymbol{v}_m}{dt}\right\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}'} \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_m\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Beschränktheit von $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}$ ist $(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ eine Cauchy-Folge und besitzt aufgrund der Vollständigkeit von $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ (cf. Satz 3.2) einen Grenzwert $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{\mathcal{W}}}\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}$. Da gleichzeitig eine Teilfolge $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\Lambda} \subseteq C^\infty(\overline{I}, V)$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\to} (\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t) \text{ in } H$$

für fast alle $t \in I$, muss $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{\mathcal{W}}}\boldsymbol{v}$ Repräsentant von $\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}$ und damit $\boldsymbol{j}\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ im Sinne von Lemma 3.10 sein. Also ist gemäß Bemerkung 3.18 (i) $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und damit $\boldsymbol{\mathcal{W}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$. Insbesondere gilt für jedes $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ und für die obige Folge $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{I}, V)$, dass

$$\boldsymbol{v}_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{v} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}.$$

Damit folgt weiter, dass

$$\boldsymbol{v}_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{v} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{W}},$$

das heißt Punkt (ii). Wiederholt man die obigen Rechenschritte, wobei man nun $\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_m$ durch $\boldsymbol{v}_n$ ersetzt, so erhält man

$$\|\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq \frac{1}{T}\|\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n\|_{L^1(I,H)} + \sqrt{2\left\|\frac{d_e\boldsymbol{v}_n}{dt}\right\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}'}\|\boldsymbol{v}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und im Grenzübergang $(n \to \infty)$

$$\|\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{\mathcal{W}}}\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq \frac{1}{T}\|\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}\|_{L^1(I,H)} + \sqrt{2\left\|\frac{d_e\boldsymbol{v}}{dt}\right\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}'}\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}},$$

das heißt $\boldsymbol{\mathcal{W}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$. Die Injektivität gilt offensichtlich, sodass auch Punkt (iii) nachgewiesen ist.

Sei nun zusätzlich $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ und $(\boldsymbol{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{I}, V)$ die entsprechende Approximation wie zuvor. Dann gilt mit dem bereits Bewiesenen, dass

$$\boldsymbol{w}_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{w} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{W}}.$$

Offensichtlich gilt

$$\left\langle \frac{d_e\boldsymbol{v}_n}{dt}, \boldsymbol{w}_n\chi_{[t',t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = [((\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n)(s), (\boldsymbol{j}\boldsymbol{w}_n)(s))_H]_{s=t'}^{s=t} - \left\langle \frac{d_e\boldsymbol{w}_n}{dt}, \boldsymbol{v}_n\chi_{[t',t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $t, t' \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$ und $n \in \mathbb{N}$. Im Grenzübergang $(n \to \infty)$ folgt schließlich Punkt (iv).■

Definition 5.6: (Verallgemeinerte Evolutionsgleichung) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $p \leq q \leq \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}'$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ wie Bemerkung 5.3. Des Weiteren sei $\boldsymbol{y}_0 \in H$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}'$ und $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}'$ ein Operator. Dann heißt eine Anfangswertaufgabe der Form

$$\begin{aligned} \frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{f} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}', \\ (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H \end{aligned} \tag{1}$$

verallgemeinerte (nichtlineare) Evolutionsgleichung. Dabei ist die Punktauswertung der Anfangswertbedingung im Sinne des stetigen Repräsentanten $\boldsymbol{j}\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ zu verstehen.

Bemerkung 5.7: (Betrachtete Stetigkeitseigenschaft) Der betrachtete Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}'$ soll der verallgemeinerten Bedingung (M) genügen. Diese wurde allerdings nur für den Fall $\boldsymbol{\mathcal{X}}' = \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$, das heißt $q < \infty$ definiert, was seinen Ursprung in der Eigenschaft der verallgemeinerten Bedingung (M) hat, bei lokaler Beschränktheit und Reflexivität des Bildbereichs $\boldsymbol{\mathcal{X}}'$ Demistetigkeit zu implizieren. Letztere Eigenschaft ist für den späteren Existenzbeweis unerlässlich. Deshalb beschränkt sich diese Arbeit auf den Fall $q < \infty$, da dort für reflexives V die Reflexivität von $\boldsymbol{\mathcal{X}}' = \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ gemäß der Sätze 2.8 (i) und 3.11 sichergestellt werden kann.

Da man nun von einer wesentlich schwächeren Stetigkeitseigenschaft ausgeht, im Sinne, dass man nun stärkere Konvergenzeigenschaften nachweisen muss, benötigt man entsprechend stärkere Wachstumseigenschaften, die dies liefern. Es wird sich zeigen, dass die folgende Bedingung dies gewährleistet und dabei nicht nur sehr allgemein, sondern auch leicht handhabbar ist.

Definition 5.8: (Bedingung (K)) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ wie Bemerkung 5.3. Der Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt der

(i) Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$, falls für alle $K \geq 0$ eine Konstante $M := M(K, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) > 0$ existiert, sodass für $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ aus

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\|_H^2 + \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq K$$

für alle $t \in \overline{I}$ folgt, dass

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M.$$

Insbesondere ist die Konstante $M > 0$ unabhängig von allen $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$.

(ii) Bedingung (K), falls er für alle $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f}$ genügt.

Bemerkung 5.9: Die Bedingung (K) wirkt auf den ersten Blick sehr künstlich, wird sich im Laufe dieser Arbeit allerdings als natürliche und gleichzeitig sehr angenehme Eigenschaft herausstellen, da sie stabil unter Verschiebungen des Bildbereichs und Einschränkung eines Operators im Sinne von Lemma 2.17 ist. Als Erstes stellt man fest, dass die Bedingung (K) bei geeigneten Wachstums- und Beschränktheitseigenschaften erfüllt ist. Genauer wird die Bedingung (K) durch Koerzivität und eine Art schwache unterhalbe Beschränktheit impliziert.

Lemma 5.10: (Hinreichende Bedingungen für Bedingung (K)) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ wie Bemerkung 5.3. Ist der Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ koerziv und es existiert ein beschränkter Operator $\boldsymbol{\varsigma} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \geq \boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{v})$$

für alle $t \in \overline{I}$ und $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$. Dann genügt $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K).

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt. Für $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ betrachtet man sonst den Operator $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{A}}} := \boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{f} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$, welcher wieder koerziv ist und mit $\widehat{\boldsymbol{\varsigma}} := \boldsymbol{\varsigma} - \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}\|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \mathbb{R}$ den Voraussetzungen dieses Lemmas und damit der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt. Insgesamt folgt dann die Bedingung (K) für $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$.

Sei also $K \geq 0$ beliebig. Sei weiter $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ mit

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\|_H^2 + \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq K$$

für alle $t \in \overline{I}$. Da $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ koerziv ist, existiert ein $R := R(\boldsymbol{\mathcal{A}}) > 0$, sodass

$$\frac{\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}{\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}} \geq 1$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ mit $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \geq R$. Definiere nun $M_0 := \max\{R, K\} > 0$. Angenommen $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} > M_0 \geq R$. Dann gilt $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \geq \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$. Setzt man dies oben für $t = T$ ein, so erhält

man

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(T)\|_H^2 + \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq K.$$

Das liefert den gewünschten Widerspruch, da nach Annahme $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} > M_0 \geq K$. Demnach muss $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq M_0$ gelten. Außerdem ist

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\|_H^2 + \boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{v}) \leq K$$

für alle $t \in \overline{I}$. Wegen $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq M_0$ und der Beschränktheit von $\boldsymbol{\varsigma} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \mathbb{R}$, existiert eine Konstante $\Lambda := \Lambda(M_0, \boldsymbol{\varsigma}) > 0$, sodass $|\boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{v})| \leq \Lambda$. Daraus folgt weiter, dass

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\|_H^2 \leq K + \Lambda$$

für alle $t \in \overline{I}$, das heißt $\|\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq \sqrt{2}(K+\Lambda)^{\frac{1}{2}}$. Für $M := M(K, \boldsymbol{\mathcal{A}}) := M_0 + \sqrt{2}(K+\Lambda)^{\frac{1}{2}} > 0$ gilt also

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M. \qquad \blacksquare$$

Folgerung 5.11: Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ wie Bemerkung 5.3. Des Weiteren sei $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ koerziv mit

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}), \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $t \in \overline{I}$ und $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und es existiere eine Konstante $\Lambda > 0$, sodass

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \geq -\Lambda$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$. Dann genügt $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K).

Beweis: Wegen $\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$ (cf. Bemerkung 3.18 (ii)) ist $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ wohldefiniert. Für $\boldsymbol{\varsigma} \equiv -\Lambda : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}), \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \geq -\Lambda = \boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{v})$$

für alle $t \in \overline{I}$ und $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$. Dann liefert Lemma 5.10 unmittelbar, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K) genügen muss. $\blacksquare$

Folgerung 5.12: Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ wie Bemerkung 5.3. Des Weiteren sei $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ koerziv und beschränkt. Dann genügt $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K).

Beweis: Der Operator $\boldsymbol{\varsigma} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \mathbb{R}$ mit $\boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{v}) := -\|\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ für $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ ist aufgrund der Beschränktheit von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ selbst beschränkt und erfüllt $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \geq -\|\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}\|\boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \geq \boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und $t \in \overline{I}$. Lemma 5.10 liefert nun unmittelbar, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K) genügen muss. $\blacksquare$

6 Existenzsatz mit separablem V

Bemerkung 6.1: (Allgemeiner Galerkin-Ansatz) Im Allgemeinen ist der Bildbereich V nur separabel und reflexiv. Die üblichen Existenzsätze aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen sind dann aufgrund fehlender Kompaktheit im Bildbereich nicht anwendbar.

Die allgemeine Idee des Galerkin-Ansatzes besteht nun darin, eine Klasse von Unterräumen $\mathcal{U}$ von V zu betrachten, die V in einem gewissen Sinn approximieren und Eigenschaften aufweisen, die gerade so gewählt sind, sodass Existenzaussagen möglich sind, wenn man in (1) V durch ein $U \in \mathcal{U}$ ersetzt. Auf diese Weise erhält man eine Familie von Lösungen $(\boldsymbol{y}_U)_{U\in\mathcal{U}}$. Ist diese Familie zusätzlich beschränkt und sind die zugrunde liegenden Räume reflexiv, dann erhält man schwach konvergente Teilnetze/-folgen, welche die ursprünglich gesuchte Lösung von (1) approximieren sollen. Im Folgenden wird geklärt, wie die Approximation im Detail aussieht.

(i) Galerkin-Basis: Sei $\mathcal{U}$ ein System von Unterräumen $U \subseteq V$, sodass $(U, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum ist und

$$\overline{\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U}^{\|\cdot\|_V} = V$$

erfüllt. Des Weiteren sei für $U \in \mathcal{U}$

$$H_U := \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}$$

und durch $\boldsymbol{y}_0^U \in H_U$ ein Netz von Anfangswerten gegeben, sodass

$$\boldsymbol{y}_0^U \overset{U\in\mathcal{U}}{\to} \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H \text{ und } \|\boldsymbol{y}_0^U\|_H \leq \|\boldsymbol{y}_0\|_H.$$

Dabei ist die Konvergenz zunächst im Sinne von Netzen zu verstehen, wird in dieser Arbeit aber höchstens durch die Konvergenz einer Folge realisiert. Bezeichne im Folgenden eine solche Familie $(U, \boldsymbol{y}_0^U)_{U\in\mathcal{U}}$ als **Galerkin-Basis von** V.

(ii) Einschränkung der Evolutionstripel-Struktur: $(H_U, (\cdot,\cdot)_H)$ ist ein Hilbertraum und U bettet bezüglich

$$j_U := j_{|U} : U \to H_U$$

dicht in H_U ein, sodass (U, H_U, j_U) ein Evolutionstripel (cf. Definition 5.1) definiert. Insbesondere erfüllt die zugehörige kanonische Einbettung $e_U : U \to U^*$ für alle $u, \tilde{u} \in U$

$$\langle e_U u, \tilde{u}\rangle_U = (ju, j\tilde{u})_H = \langle eu, \tilde{u}\rangle_V.$$

(iii) Einschränkung der Räume: Gemäß Bemerkung 5.3 oder Lemma 2.17 ist

$$(L^p(I,U), L^q(I,H_U)) := (L^p(I,U), L^q(I,H_U), L^1(I,H_U), \boldsymbol{j}_U, \mathrm{id}_{L^q(I,H_U)}),$$

ein kompatibles Paar. Dabei ist $\boldsymbol{j}_U = \boldsymbol{j}_{|L^p(I,U)} : L^p(I,U) \to L^p(I,H_U)$ mit $(\boldsymbol{j}_U\boldsymbol{u})(t) := j_U(\boldsymbol{u}(t))$ im Sinne von Satz 3.14. Für $\boldsymbol{\mathcal{X}}_U := L^p(I,U) \cap_{\boldsymbol{j}_U} L^q(I,H_U)$ und $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_U := C^0(\overline{I}, H_U)$ ist entsprechend auch

$$(\boldsymbol{\mathcal{X}}_U, \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U) := (\boldsymbol{\mathcal{X}}_U, \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U, L^1(I,H_U), \boldsymbol{j}_U, \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_U})$$

ein kompatibles Paar. Insbesondere sind also $\boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U$ und $\boldsymbol{j}_U : \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U \to \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U$ wohldefiniert. Entsprechend definiere

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_U := \left\{ \boldsymbol{u} \in W^{1,p,q'}_{e_U}(I,U,U^*) \,\middle|\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_U, \frac{d_{e_U}\boldsymbol{u}}{dt} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^* \right\}.$$

Satz 5.5 liefert dann die Einbettung $\boldsymbol{\mathcal{W}}_U \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U$ sowie die verallgemeinerte partielle Integrationsformel

$$\left\langle \frac{d_{e_U}\boldsymbol{u}}{dt}, \tilde{\boldsymbol{v}} 1_{[t',t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U} = [((\boldsymbol{j}_U \boldsymbol{v})(s), (\boldsymbol{j}_U \tilde{\boldsymbol{v}})(s))_H]_{s=t'}^{s=t} - \left\langle \frac{d_{e_U}\tilde{\boldsymbol{v}}}{dt}, \boldsymbol{v} 1_{[t',t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U}$$

für alle $t', t \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$ und $\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_U$.

(iv) Einschränkung der Operatoren und rechten Seite: Es sei

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_U := \boldsymbol{\mathcal{A}}_{(\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U}, \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_U})} := (\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U})^* \boldsymbol{\mathcal{A}} (\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U}) : \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*$$

gemäß Lemma 2.17 definiert und $\boldsymbol{f}_U := \left(\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U}\right)^* \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*$. Dann gilt für alle $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U$ und $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_U$, dass

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_U \boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \text{ und } \langle \boldsymbol{f}_U, \tilde{\boldsymbol{u}} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U} = \langle \boldsymbol{f}, \tilde{\boldsymbol{u}} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}.$$

(v) Galerkin-System: Schließlich ergibt sich für die Galerkin-Basis $(U, \boldsymbol{y}_0^U)_{U \in \mathcal{U}}$ die Wohldefiniertheit der verallgemeinerten Evolutionsgleichung (cf. Definition 5.6)

$$\begin{aligned} \frac{d_{e_U}\boldsymbol{y}_U}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}_U \boldsymbol{y}_U &= \boldsymbol{f}_U \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*, \\ (\boldsymbol{j}_U \boldsymbol{y}_U)(0) &= \boldsymbol{y}_0^U \text{ in } H_U. \end{aligned}$$

Man bezeichnet dieses System von verallgemeinerten Evolutionsgleichungen als **Galerkin-System bezüglich** $(U, \boldsymbol{y}_0^U)_{U \in \mathcal{U}}$.

Als Erstes soll ein Existenzbeweis für einen Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} := \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ geführt werden, der sich aus einem beschränkten Anteil $\boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ und einem monotonen aber nicht notwendigerweise beschränkten Anteil $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0 : \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ zusammensetzt. Der betrachtete Operator soll insbesondere nicht induziert sein, was zu einem erheblichen technischen Aufwand beim Beweis der Existenz der Galerkin-Lösungen führt.

Satz 6.2: (Existenzsatz für separables V) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, V separabel und reflexiv, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ wie in Bemerkung 5.3. Des Weiteren gelte:

(1) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0 : \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ist monoton.

(2) $\boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ist beschränkt.

(3) $\boldsymbol{\mathcal{A}} := \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ und der verallgemeinerten Bedingung (M).

Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in H$ eine Lösung $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ von (1).

Beweis:

0. Reduktion auf triviale rechte Seite: Es reicht die Behauptung für $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ zu zeigen. Sonst betrachtet man einfach $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{A}}} := \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ mit $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}} := \boldsymbol{\mathcal{B}} - \boldsymbol{f} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$. Man sieht leicht ein, dass $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ weiterhin der verallgemeinerten Bedingung (M) sowie der Bedingung (K) bezüglich $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt. Außerdem bleibt $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ beschränkt.

1. Galerkin-Ansatz: Der Beweis wird mit dem Galerkin-Ansatz gemäß Bemerkung 6.1 geführt. Als Galerkin-Basis soll eine Folge $(V_n, ja_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dienen, die

- $V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq V$, $\dim V_n < \infty$ und $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n}^{\|\cdot\|_V} = V$.
- $a_n \in V_n$, $ja_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{y}_0$ in H und $\|ja_n\|_H \leq \|\boldsymbol{y}_0\|_H$.

erfüllt. Diese gilt es allerdings erst geeignet zu konstruieren.

1.1 Approximation des Bildbereichs V: Für $\dim V < \infty$ genügen $V_n = V$ und $a_n = j^{-1}\boldsymbol{y}_0$. Sei nun $\dim V = \infty$. Da V separabel ist, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $M \subseteq V$. Die Stetigkeit von $j : V \to H$ liefert, dass $j(\overline{M}^{\|\cdot\|_V}) \subseteq \overline{j(M)}^{\|\cdot\|_H}$ gilt und damit

$$\overline{\langle j(M)\rangle}^{\|\cdot\|_H} \supseteq \overline{j(M)}^{\|\cdot\|_H} \supseteq j(\overline{M}^{\|\cdot\|_V}) = R(j).$$

Wegen $\overline{R(j)}^{\|\cdot\|_H} = H$ ist deshalb $\overline{\langle j(M)\rangle}^{\|\cdot\|_H} = H$. Das Gram-Schmidt-Verfahren (cf. Lemma A.14) angewendet auf $j(M)$ liefert nun ein vollständiges Orthonormalsystem $(h_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq H$ in H mit $\langle\{h_i \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle = \langle j(M)\rangle$. Da $j : \langle M\rangle \to \langle j(M)\rangle$ linear und bijektiv ist, existiert $j^{-1} : \langle j(M)\rangle \to \langle M\rangle$ und ist wieder linear. Für $v_i := j^{-1}h_i$ $(i \in \mathbb{N})$ gilt dann aufgrund der Linearität von j^{-1}, dass

$$\langle\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle = j^{-1}(\langle\{h_i \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle) = j^{-1}(\langle j(M)\rangle) = \langle M\rangle.$$

Dann erfüllt $V_n := \langle v_1, ..., v_n\rangle$ offensichtlich $\langle M\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ und liefert die gewünschte Approximation $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Bildbereichs V.

1.2 Approximation des Anfangswerts: Da $(h_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq H$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H bildet, erfüllt $a_n := \sum_{i=1}^{n} (h_i, \boldsymbol{y}_0)_H v_i \in V_n$ gemäß der Eigenschaften des **n-ten Projektionsoperators** $P_n : H \to H_{V_n}$ (cf. Lemma A.15) definiert durch

$$P_n h := \sum_{i=1}^{n} (h_i, h)_H h_i$$

für $h \in H$, dass $ja_n = P_n\boldsymbol{y}_0 \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{y}_0$ in H und $\|ja_n\|_H = \|P_n\boldsymbol{y}_0\|_H \leq \|\boldsymbol{y}_0\|_H$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Galerkin-System: Gemäß Bemerkung 6.1 ergibt sich die Wohldefiniertheit des Galerkin-Systems bezüglich $(V_n, ja_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann soll $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}$ **n-te Galerkinlösung** heißen, falls

$$\begin{aligned} \frac{d_{e_{V_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{y}_n = \mathbf{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n}, \\ (\boldsymbol{j}_{V_n}\boldsymbol{y}_n)(0) = ja_n \text{ in } H_{V_n}. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Existenz der Galerkinlösungen: Die Existenz der Galerkin-Lösungen, zeigt man ähnlich zu den Sätzen von Peano und Caratheodory, indem man (2) mit Hilfe des auch für Bochner-Sobolev-Funktionen geltenden Hauptsatzes (cf. Satz 4.8) äquivalent in ein Fixpunktproblem überführt und dann eine geeignete Version des Fixpunktsatzes von Schauder anwendet. Zu diesem Zweck überführt man (2) zunächst in eine äquivalente Operatordifferentialgleichung:

2.1 Äquivalente Operatordifferentialgleichung: Da $e_{V_n} : V_n \to V_n^*$ einen Isomorphismus definiert, ist der linear-induzierte Operator $\boldsymbol{e}_n : L^{q'}(I, V_n) \to L^{q'}(I, V_n^*)$ gemäß Satz 3.14 (iii) ebenfalls ein Isomorphismus. Lemma 4.6 liefert darüber hinaus, dass auch

$$\boldsymbol{e}_n : W^{1,q'}(I, V_n) \to W^{1,q'}(I, V_n^*) \text{ mit } \frac{d_{V_n^*}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{e}_n\frac{d_{V_n}\boldsymbol{v}}{dt} \text{ in } L^{q'}(I, V_n^*).$$

ein Isomorphismus ist.

Laut Bemerkung 4.4 und der Definition von $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}$ (cf. Bemerkung 6.1 (iii)) erfüllt $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}$ die Identität $(2)_1$ genau dann, wenn $\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{y}_n \in W^{1,q'}(I, V_n^*)$ mit

$$\frac{d_{V_n^*}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{y}_n}{dt} = \frac{d_{e_{V_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt} = -\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{y}_n \text{ in } L^{q'}(I, V_n^*).$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}^* = L^{p'}(I, V_n^*) +_{\boldsymbol{j}_{V_n}^*} L^{q'}(I, H_{V_n}^*) \hookrightarrow L^{q'}(I, V_n^*)$. Unter Verwendung von Lemma 4.6 ergibt sich die Äquivalenz von Letzterem und $\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{e}_n^{-1}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{y}_n \in W^{1,q'}(I, V_n)$ mit

$$\frac{d_{V_n}\boldsymbol{y}_n}{dt} = \frac{d_{V_n}\boldsymbol{e}_n^{-1}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{y}_n}{dt} = \boldsymbol{e}_n^{-1}\frac{d_{V_n^*}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{y}_n}{dt} = -\boldsymbol{e}_n^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{y}_n \text{ in } L^{q'}(I, V_n).$$

Gemäß Satz 4.8 gilt die Einbettung $W^{1,q'}(I, V_n) \to C^0(\overline{I}, V_n)$, sodass $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}$ die Punktauswertung $(2)_2$ genau dann erfüllt, falls $\{\boldsymbol{y}_n\}_{V_n}(0) = a_n$ in V_n im Sinne des stetigen Repräsentanten $\{\boldsymbol{y}_n\}_{V_n} \in C^0(\overline{I}, V_n)$. Insgesamt ist $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}$ genau dann Lösung von (2), wenn $\boldsymbol{y}_n \in W^{1,q'}(I, V_n)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d_{V_n}\boldsymbol{y}_n}{dt} &= -\boldsymbol{e}_n^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{y}_n \text{ in } L^{q'}(I, V_n), \\ \{\boldsymbol{y}_n\}_{V_n}(0) &= a_n \text{ in } V_n. \end{aligned} \tag{3}$$

2.2 Äquivalente Integraldarstellung und Fixpunktoperator: Lemma 4.7 sichert nun die Wohldefiniertheit von $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to W^{1,q'}(I, V_n)$ mit

$$(\boldsymbol{\mathcal{F}}_n\boldsymbol{v})(t) := a_n - (\boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{e}_n^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{v})(t) = a_n - \int_0^t (\boldsymbol{e}_n^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{v})(s)ds \text{ in } V_n \text{ für } t \in \overline{I}.$$

Mit $W^{1,q'}(I, V_n) \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}$ (cf. Bemerkung 4.9 (ii)) folgt weiter die Wohldefiniertheit von

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_n : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}.$$

Analog zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt mit Lemma 4.7 und Satz 4.8 die Äquivalenz von (3) und der Existenz eines Fixpunktes von $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n : W^{1,q'}(I, V_n) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to W^{1,q'}(I, V_n)$.

2.3 Existenz eines Fixpunkts von $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$: Die Existenz eines Fixpunktes wird mit folgender Version des Fixpunktsatzes von Schauder bewiesen:

Satz: (Schauder) *Sei $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ ein Banachraum, $\mathcal{F} : \mathcal{K} \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{K}$ ein stetiger Operator und $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ konvex und kompakt. Dann existiert ein $x \in \mathcal{K}$, sodass*

$$\mathcal{F}x = x \text{ in } \mathcal{X}.$$

Beweis: *Siehe [Růž04, Kapitel 1, Satz 2.46].* ■

Es gilt nun die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Schauder nachzuweisen:

(i) Stetigkeit von $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$: Gemäß Lemma 2.17 (iii) ist der Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n} \hookrightarrow L^{q'}(I, V_n^*)$ demistetig. Die Operatoren $\boldsymbol{e}_n^{-1} : L^{q'}(I, V_n^*) \to L^{q'}(I, V_n)$ und $\boldsymbol{\mathcal{V}} : L^{q'}(I, V_n) \to W^{1,q'}(I, V_n)$ sind linear und stetig (cf. Satz 3.14 und Lemma 4.7) also schwach stetig, sodass $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n = a_n - \boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{e}_n^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to W^{1,q'}(I, V_n)$ demistetig ist. Mit $\dim V_n < \infty$ und Folgerung 4.11 folgt, dass

$$\mathrm{id}_{W^{1,q'}(I,V_n)} : W^{1,q'}(I, V_n) \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}$$

stark stetig und schließlich $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}$ stetig ist.

(ii) Selbstabbildungseigenschaft des äquivalenten, gestauchten Fixpunktproblems: Da $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$ die geforderte Selbstabbildungseigenschaft im Allgemeinen nicht erfüllt, konstruiert man einen Stauchungsoperator $\tau_n : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to (0, 1]$, sodass $\tau_n\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$ die Selbstabbildungseigenschaft erfüllt und gleichzeitig dieselbe Fixpunktmenge wie $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$ besitzt. Dann reicht es, für den gestauchten Operator die Existenz eines Fixpunkts zu zeigen.

Da man noch nicht weiß, wie der Stauchungsoperator τ_n zu wählen ist, betrachtet man einfach $\tau_n\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$ für einen beliebigen Operator $\tau_n : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to (0, 1]$ und zeigt die Existenz von a-priori Abschätzungen, die von diesem Stauchungsoperator unabhängig sind:

(a) A-priori Abschätzungen des gestauchten Problems: Sei nun $\tau_n : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to (0, 1]$ der noch zu bestimmende Stauchungsoperator. Angenommen es existiere ein Fixpunkt $\boldsymbol{y}_n \in W^{1,q'}(I, V_n)$ von $\tau_n\boldsymbol{\mathcal{F}}_n : W^{1,q'}(I, V_n) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to W^{1,q'}(I, V_n)$. Dann folgt analog zur Argumentation in (2.1) und (2.2), dass $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d_{e_{V_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt} + \tau_n(\boldsymbol{y}_n)\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n}, \\ (\boldsymbol{j}_{V_n}\boldsymbol{y}_n)(0) = \tau_n(\boldsymbol{y}_n) j a_n \text{ in } H_{V_n}. \end{aligned}$$

Testen mit $\boldsymbol{y}_n\chi_{[0,t]} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}$, wobei $t \in (0, T]$ beliebig ist, liefert dann unter Verwendung der Identität $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}$, $\tilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}$ und der in $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}$ geltenden verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Bemerkung 6.1 (iii)), dass

$$\begin{aligned} \tau_n(\boldsymbol{y}_n)\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \tau_n(\boldsymbol{y}_n)\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} &= -\left\langle \frac{d_{e_{V_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt}, \boldsymbol{y}_n\chi_{[0,t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} \\ &= -\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}_{V_n}\boldsymbol{y}_n)(t)\|_H^2 + \frac{\tau_n(\boldsymbol{y}_n)^2}{2}\|j a_n\|_H^2. \end{aligned}$$

Mit $\|ja_n\|_H \leq \|\boldsymbol{y}_0\|_H$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (cf. (1.2)) folgt

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n)(t)\|_H^2 + \tau_n(\boldsymbol{y}_n)\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq \frac{\tau_n(\boldsymbol{y}_n)^2}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2. \tag{□}$$

Mit Division durch $0 < \tau_n(\boldsymbol{y}_n) \leq 1$ ergibt sich

$$\frac{1}{2\tau_n(\boldsymbol{y}_n)}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n)(t)\|_H^2 + \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq \frac{\tau_n(\boldsymbol{y}_n)}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \tag{□□}$$

für alle $t \in \overline{I}$. Da $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2\tau_n(\boldsymbol{y}_n)}$ und $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K) bezüglich $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt, existiert eine von $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante $M := M(\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2, \boldsymbol{\mathcal{A}}) > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der Beschränktheit von $\boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ folgt zunächst die Existenz einer von $n \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstanten $C > 0$, sodass $\|\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit (□□) im Fall $t = T$ folgt daraus

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_0\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \langle \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq \|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 + CM$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Lemma 1.5 liefert schließlich für $h \equiv 1$ und $S = (\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}$ eine von $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante $M' > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*} \leq M'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Konstruktion des Stauchungsoperators τ_n: Mit der Demistetigkeit von $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}^*$ (cf. Lemma 2.17 (iii)) folgt die Stetigkeit der Operatoren

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v} \mapsto |\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}}|) &: \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\\ \text{und } \|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}} &: \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}.\end{aligned}$$

Mit Lemma A.19 folgt weiter, dass auch die **Stauchungsoperatoren** $g, h : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch

$$g(\boldsymbol{v}) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq 2M \\ \frac{2M}{\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}}} & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } h(\boldsymbol{v}) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } |\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}}| \leq M'M \\ \frac{M'M}{|\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}}|} & \text{, sonst} \end{cases}$$

stetig sind. Schließlich ist der Stauchungsoperator

$$\tau_n := g\,(h \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}_n) \cdot h : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to (0, 1]$$

und damit weiterhin der gestauchte Operator $\tau_n\boldsymbol{\mathcal{F}}_n : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}$ stetig.

(c) Äquivalenz der Fixpunktprobleme: Da $\tau_n : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{\jmath}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to (0,1]$ in (2.3) (ii) (a) noch ein beliebiger Operator war, gelten sowohl für den in (2.3) (ii) (b) definierten Stauchungsoperator, als auch für $\tau_n \equiv 1$ die a-priori Abschätzungen in (2.3) (ii) (a). Genauer erfüllt sowohl ein Fixpunkt $\boldsymbol{y}_n \in W^{1,q'}(I, V_n)$ von $\tau_n \boldsymbol{\mathcal{F}}_n$ als auch von $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$ die Abschätzungen

$$\|\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M \text{ und } \|\boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*} \leq M'$$

mit denselben von $n \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstanten $M, M' > 0$. Das impliziert $|\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| \leq M' M$ und liefert daher direkt $h(\boldsymbol{y}_n) = 1$ (cf. (2.3) (ii) (b)). Ist nun $\boldsymbol{y}_n \in W^{1,q'}(I, V_n)$ ein Fixpunkt von $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$, dann gilt mit

$$\|\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M < 2M$$

und der Definition von g (cf. (2.3) (ii) (b)), dass

$$g(h(\boldsymbol{y}_n) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n) = g(\boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n) = g(\boldsymbol{y}_n) = 1.$$

Das ergibt $\tau_n(\boldsymbol{y}_n) = 1$ und damit $\tau_n(\boldsymbol{y}_n) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y}_n$ in $W^{1,q'}(I, V_n)$.

Ist dagegen $\boldsymbol{y}_n \in W^{1,q'}(I, V_n)$ ein Fixpunkt von $\tau_n \boldsymbol{\mathcal{F}}_n$, dann muss auch schon $\tau_n(\boldsymbol{y}_n) = g(h(\boldsymbol{y}_n) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n) h(\boldsymbol{y}_n) = 1$ gelten. Denn sonst müsste wegen $h(\boldsymbol{y}_n) = 1$ und der Definition von g gelten, dass $\|\boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} > 2M$. Das wiederum ergäbe

$$\begin{aligned} M \geq \|\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} &= \|\tau_n(\boldsymbol{y}_n) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} = \|g\left(h(\boldsymbol{y}_n) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n\right) h(\boldsymbol{y}_n) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \\ &= \|g\left(\boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n\right) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} = \frac{2M}{\|\boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}}} \|\boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} = 2M > M, \end{aligned}$$

und damit einen Widerspruch. Also ist $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n = \tau_n(\boldsymbol{y}_n) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y}_n$ in $W^{1,q'}(I, V_n)$.

(d) Existenz eines Fixpunkts von $\tau_n \boldsymbol{\mathcal{F}}_n$: Aufgrund der Einbettung $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n} \hookrightarrow L^{q'}(I, V_n^*)$ ist $\boldsymbol{e}_n^{-1} : \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n} \to L^{q'}(I, V_n)$ wohldefiniert und stetig. Mit $\boldsymbol{\mu}_n := \|\boldsymbol{e}_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n}, L^{q'}(I, V_n))}$ gilt dann für beliebiges $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{\jmath}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}$, dass

$$\triangleright\ \|\tau_n(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2M \|h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}}}{\|h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}}} & \text{, falls } \|h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} > 2M \\ \|h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} & \text{, falls } \|h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{\jmath}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq 2M \end{array} \right\} \leq 2M.$$

$$\begin{aligned} \triangleright\ \left\| \frac{d_{V_n} \tau_n(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{v}}{dt} \right\|_{L^{q'}(I, V_n)} &= \left\| \frac{d_{V_n}}{dt} (\tau_n(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{V}} \boldsymbol{e}_n^{-1} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} \boldsymbol{v}) \right\|_{L^{q'}(I, V_n)} \\ &= \left\| g\left(h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{v}\right) h(\boldsymbol{v}) \frac{d_{V_n}}{dt} (\boldsymbol{\mathcal{V}} \boldsymbol{e}_n^{-1} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} \boldsymbol{v}) \right\|_{L^{q'}(I, V_n)} \\ &\leq \|h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{e}_n^{-1} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} \boldsymbol{v}\|_{L^{q'}(I, V_n)} \\ &= \left\| h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{e}_n^{-1} (\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}})^* \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{v} \right\|_{L^{q'}(I, V_n)} \\ &\leq \boldsymbol{\mu}_n \|(\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}})^* h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n}} \leq \boldsymbol{\mu}_n \|h(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}. \end{aligned}$$

Dabei wurde für die Ableitung im zweiten Gleichheitszeichen verwendet, dass $\tau_n(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$. In der ersten Abschätzung wurde ausgenutzt, dass $|g(h \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}_n)| \leq 1$ und $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{V}} = \mathrm{id}_{L^{q'}(I,V_n)}$ (cf. Lemma 4.7). Die darauffolgende Identität und Abschätzung ergeben sich aus der Definition von $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}$ (cf. Bemerkung 6.1 (iv)) und der gemäß Satz A.11 (i) geltenden Identität

$$\|\!|(\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}})^*|\!\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{\mathcal{X}}^*,\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n})} = \|\!|\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}}|\!\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n},\boldsymbol{\mathcal{X}})} \leq 1.$$

Definiere nun

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} := B_{2M}^{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}}(0) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}.$$

Mit der Beschränktheit von $\boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ und der Einbettung $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ (cf. Lemma 2.17) folgt zunächst die Existenz einer Konstanten $K_0 > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*} \leq K_0$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. Dann gilt weiter mit der Definition von h (cf. (2.3) (ii) (b)), dass

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{v})\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_0\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} &= h(\boldsymbol{v})\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - h(\boldsymbol{v})\langle \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \\ &\leq h(\boldsymbol{v})\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} + \|\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \\ &\leq M'M + 2K_0M \end{aligned}$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. Mit Lemma 1.5 für $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0$ und h sowie der Beschränktheit von $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ folgt ein $K_1 > 0$, sodass

$$\|h(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*} \leq K_1$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. Das heißt, es gilt

$$\left\| \frac{d_{V_n}\tau_n(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\mathcal{F}}_n\boldsymbol{v}}{dt} \right\|_{L^{q'}(I,V_n)} \leq \boldsymbol{\mu}_n K_1$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. Definiere schließlich

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_n := \left\{ \boldsymbol{v} \in W^{1,q'}(I,V_n) \cap \boldsymbol{\mathcal{S}} \,\middle|\, \left\| \frac{d_{V_n}\boldsymbol{v}}{dt} \right\|_{L^{q'}(I,V_n)} \leq \boldsymbol{\mu}_n K_1 \right\} \subseteq W^{1,q'}(I,V_n),$$

$$\text{und } \boldsymbol{\mathcal{K}}_n := \overline{\mathrm{id}_{W^{1,q'}(I,V_n)}(\boldsymbol{\mathcal{B}}_n)}^{\|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}.$$

Dann ist $\tau_n\boldsymbol{\mathcal{F}}_n : \boldsymbol{\mathcal{K}}_n \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \boldsymbol{\mathcal{K}}_n$ wohldefiniert und stetig. Außerdem ist $\boldsymbol{\mathcal{B}}_n$ offensichtlich nichtleer, beschränkt und konvex. Folgerung 4.11 sichert, dass

$$W^{1,q'}(I,V_n) \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}.$$

Das heißt $\boldsymbol{\mathcal{K}}_n$ ist nichtleer, konvex und kompakt bezüglich der starken $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}$-Topologie, sodass der Fixpunktsatz von Schauder anwendbar ist. Nach (2.3) (ii) (c) ist er auch Fixpunkt von $\boldsymbol{\mathcal{F}}_n$ und nach (2.2) und (2.1) Lösung von (3) und (2).

3. Grenzübergang:

3.1 Konvergenz der Galerkinlösungen: Nach (2.3) (ii) (a) für $\tau_n \equiv 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M \text{ und } \|\boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*} \leq M',$$

wobei $M, M' > 0$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ sind. Mit der Reflexivität von $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ (cf. Satz 3.11 und Satz 2.8 (i)) und der Charakterisierung relativ *-schwach folgenkompakter Mengen in $L^\infty(I, H)$ gemäß Lemma 3.15 folgt die Existenz einer Teilfolge, die wieder mit $(\boldsymbol{y}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ bezeichnet werden soll, und von Elementen $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H) = L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$ und $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$, sodass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_n &\overset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}, \\ \boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{j}\boldsymbol{y} \text{ in } L^\infty(I, H) \ (n \to \infty) \\ \text{und } \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n &\overset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\xi} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*. \end{aligned}$$

3.2 Regularität und Randwerte des schwachen Grenzwerts: Sei nun $v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ beliebig. Wegen $V_n \subseteq V_{n+1}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $v \in V_n$ für alle $n \geq n_0$. Für $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T) = 0$ ist dann $v\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}$ mit $\frac{d_{e_{V_n}} v\varphi}{dt} = e_{V_n}(v)\varphi' \boldsymbol{\iota}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}^*$ für alle $n \geq n_0$, sodass Testen von (2) für alle $n \geq n_0$ mit Letzterer und anschließender Anwendung der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Satz 5.5 (iv)) liefert, dass

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} \boldsymbol{y}_n, v\varphi \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} = -\left\langle \frac{d_{e_{V_n}} \boldsymbol{y}_n}{dt}, v\varphi \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} = \langle e_{V_n}(v)\varphi' \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{y}_n \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} + (ja_n, jv)_H \varphi(0)$$

für alle $n \geq n_0$. Daraus ergibt sich unter Beachtung von $\langle e_{V_n} v, \tilde{v} \rangle_{V_n} = \langle ev, \tilde{v} \rangle_V$ für alle $v, \tilde{v} \in V_n$ und $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} \boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}$ und $\tilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}$, dass

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, v\varphi \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle e(v)\varphi' \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{y}_n \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} + (ja_n, jv)_H \varphi(0)$$

für alle $n \geq n_0$. Im Grenzübergang $(n \to \infty)$ folgt unter Beachtung der in (3.1) aufgeführten Konvergenzen und $ja_n \overset{n \to \infty}{\to} \boldsymbol{y}_0$ in H, dass

$$\langle \boldsymbol{\xi}, v\varphi \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle e(v)\varphi' \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} + (\boldsymbol{y}_0, jv)_H \varphi(0) \tag{$\triangle$}$$

für alle $v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T) = 0$. Für $\varphi \in C_0^\infty(I)$ folgt daraus, dass

$$\langle e(v)\varphi' \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle \boldsymbol{\xi}, v\varphi \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ dicht in V liegt, folgt mit Lemma 5.4, dass $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ mit $\frac{d_e \boldsymbol{y}}{dt} = -\boldsymbol{\xi}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$. Nun kann man gemäß Satz 5.5 (iv) in ($\triangle$) partiell integrieren und erhält

$$((\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) - \boldsymbol{y}_0, jv)_H \varphi(0) = 0$$

für alle $v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Da $j(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n)$ dicht in H liegt, folgt daraus für $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T) = 0$ und $\varphi(0) = 1$, dass

$$(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) = \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H.$$

3.3 Schwache Konvergenz in $\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_j \boldsymbol{\mathcal{Y}}$: Ziel ist es im Folgenden die Charakterisierung der schwachen Konvergenz in $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ gemäß Satz 3.3 auszunutzen, genauer punktweise schwache Konvergenz in H nachzuweisen.

Sei dazu $t \in (0,T]$ beliebig aber fixiert. Die a-priori Abschätzung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{jy}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M$ liefert dann eine zunächst von $t \in (0,T]$ abhängende Teilfolge $((\boldsymbol{jy}_n)(t))_{n\in\boldsymbol{\Lambda}_t} \subseteq H$ mit $\boldsymbol{\Lambda}_t \subseteq \mathbb{N}$ und ein Element $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_t} \in H$, sodass

$$(\boldsymbol{jy}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_t} \text{ in } H \ (n \in \boldsymbol{\Lambda}_t).$$

Es ist also zu zeigen, dass $\boldsymbol{\Lambda}_t = \mathbb{N}$ gewählt werden kann. Dazu betrachtet man ein beliebiges $v \in \bigcup_{n\in\boldsymbol{\Lambda}_t} V_n$. Wegen $V_n \subseteq V_m$ für $m,n \in \boldsymbol{\Lambda}_t$ mit $n \leq m$ existiert wieder ein $n_{0,t} \in \boldsymbol{\Lambda}_t$, sodass $v \in V_n$ für alle $n \geq n_{0,t}$ mit $n \in \boldsymbol{\Lambda}_t$. Testen von (2) für $n \geq n_{0,t}$ $(n \in \boldsymbol{\Lambda}_t)$ mit $v\varphi\chi_{[0,t]} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}$, wobei $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(0) = 0$ beliebig ist, liefert wie in (3.2), dass

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}y}_n, v\varphi\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle e(v)\varphi'\chi_{[0,t]}, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - ((\boldsymbol{jy}_n)(t), jv)_H\varphi(t)$$

für alle $n \geq n_{0,t}$ mit $n \in \boldsymbol{\Lambda}_t$. Im Grenzübergang $(n \to \infty, n \in \boldsymbol{\Lambda}_t)$ folgt nun, dass

$$\langle \boldsymbol{\xi}, v\varphi\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle e(v)\varphi'\chi_{[0,t]}, \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - (\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_t}, jv)_H\varphi(t)$$

für alle $v \in \bigcup_{n\in\boldsymbol{\Lambda}_t} V_n$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(0) = 0$. Die verallgemeinerte partielle Integrationsformel liefert dann, dass

$$((\boldsymbol{jy})(t) - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_t}, jv)_H\varphi(t) = 0$$

für alle $v \in \bigcup_{n\in\boldsymbol{\Lambda}_t} V_n$. Da wegen $V_n \subseteq V_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offensichtlich $\bigcup_{n\in\boldsymbol{\Lambda}_t} V_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ ist und damit dicht in V liegt, erhält man für $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(t) = 1$ und $\varphi(0) = 0$, dass $(\boldsymbol{jy})(t) = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_t}$ in H, das heißt

$$(\boldsymbol{jy}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{jy})(t) \text{ in } H \ (n \in \boldsymbol{\Lambda}_t).$$

Da diese Argumentation für jede Teilfolge von $((\boldsymbol{jy}_n)(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ wahr bleibt, ist $(\boldsymbol{jy})(t) \in H$ schwacher Häufungspunkt jeder Teilfolge von $((\boldsymbol{jy}_n)(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$. Das Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1) liefert nun, dass $\boldsymbol{\Lambda}_t = \mathbb{N}$ gewählt werden kann. Da $t \in (0,T]$ beliebig war, erreicht man schließlich

$$(\boldsymbol{jy}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{jy})(t) \text{ in } H$$

für alle $t \in \overline{I}$. Mit $\|\boldsymbol{jy}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M$ und der Charakterisierung der schwachen Konvergenz in $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ (cf. Satz 3.3) folgt daraus

$$\boldsymbol{jy}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{jy} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{Y}}.$$

Schließlich erhält man mit der Charakterisierung der schwachen Konvergenz in Schnitten (cf. Folgerung 2.9)

$$\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_j \boldsymbol{\mathcal{Y}}.$$

Nun hat man die nötigen Konvergenzeigenschaften nachgewiesen, um im nächsten Schritt mit Hilfe der verallgemeinerten Bedingung (M) den schwachen Grenzwert $\boldsymbol{\xi}$ mit $\boldsymbol{\mathcal{A}y}$ zu identifizieren.

3.4 Identifikation von $\mathcal{A}y$ und ξ: Betrachtet man nun die für Galerkin-Lösungen geltende Ungleichung ($\square$) in (2.3) (ii) (a) für $\tau_n(\boldsymbol{y}_n) = 1$, dann gilt

$$\langle \mathcal{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathcal{X}} \leq -\frac{1}{2}\|(j\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Bilden des Limes superiors bezüglich $n \in \mathbb{N}$ auf beiden Seiten liefert dann unter Beachtung der für beschränkte Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und Konstanten $c \in \mathbb{R}$ geltenden Rechenregeln (α) $\limsup_{n\to\infty}[b_n + c] \leq c + \limsup_{n\to\infty} b_n$ und (β) $\limsup_{n\to\infty} -b_n = -\liminf_{n\to\infty} b_n$, (γ) der schwachen Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_H$ und (δ) der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Satz 5.5 (iv)), dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathcal{X}} &\overset{(\alpha)}{\leq} \limsup_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\|(j\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2\right] + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \\
&\overset{(\beta)}{=} -\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|(j\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \\
&\overset{(\gamma)}{\leq} -\frac{1}{2}\|(j\boldsymbol{y})(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|(j\boldsymbol{y})(0)\|_H^2 \\
&\overset{(\delta)}{=} -\left\langle \frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt}, \boldsymbol{y}\right\rangle_{\mathcal{X}} = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y}\rangle_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Mit der verallgemeinerten Bedingung (M) folgt schließlich, dass $\mathcal{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}$ in $\mathcal{X}^*$, also

$$\begin{aligned}
\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} + \mathcal{A}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{0} \text{ in } \mathcal{X}^*, \\
(j\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz 6.2 vollständig. ■

Folgerung 6.3: (Vereinfachter Existenzsatz für separables V) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, V separabel und reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $\mathcal{X} := L^p(I, V)$, $\mathcal{Y} := C^0(\overline{I}, H)$ und $\mathcal{W} := W_e^{1,p,p'}(I, V, V^*)$. Des Weiteren gelte:

(1) $\mathcal{A}_0 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ist monoton.

(2) $\mathcal{B} : \mathcal{X} \cap_j \mathcal{Y} \to \mathcal{X}^*$ ist beschränkt.

(3) $\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \mathcal{B} : \mathcal{X} \cap_j \mathcal{Y} \to \mathcal{X}^*$ genügt der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f} \in \mathcal{X}^*$ und der verallgemeinerten Bedingung (M).

Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in H$ eine Lösung $\boldsymbol{y} \in \mathcal{W}$ von (1).

Beweis: Gemäß Bemerkung 2.5 (i) gilt die Mengengleichheit $\mathcal{X} = L^p(I, V) \cap_j L^p(I, H)$ mit Normäquivalenz, sodass die Behauptung unmittelbar aus Satz 6.2 im Fall $p = q$ folgt. ■

7 Existenzsatz mit nichtseparablem V

Ziel ist es nun, das für separable Bildbereiche bewiesene Resultat auf nur reflexive zu verallgemeinern. Fehlende Separabilität der Bildbereiche hat vor allem zur Folge, dass keine aufsteigende Folge von endlichdimensionalen Unterräumen existieren muss, die den Bildbereich bis auf Dichtheit approximiert. Dieses Problem umgeht man, indem man ein möglicherweise überabzählbares System separabler Unterräume betrachtet, welches den Bildbereich ausschöpft. Dieses System wird allerdings ungeordnet sein, sodass die für den Beweis wichtige aufsteigende Struktur lokal künstlich erzeugt werden muss. Das liefert das folgende Lemma. Man führt dann den gesamten Grenzübergang in Satz 6.2 zunächst lokal durch und setzt die gewonnenen lokalen Informationen anschließend zur gewünschten globalen Aussage zusammen.

Lemma 7.1: (Lokale Existenz aufsteigender Folgen von Unterräumen) Sei (V,H,j) ein Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $M > 0$, $\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I,V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,H)$, $\boldsymbol{y}_0 \in H$ und

$$\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0} := \left\{ U \subseteq V \mid (U, \|\cdot\|_V) \text{ separabler Banachraum mit } \boldsymbol{y}_0 \in H_U := \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H} \right\}.$$

(i) Dann ist $(U, \boldsymbol{y}_0)_{U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}}$ eine Galerkin-Basis im Sinne von Bemerkung 6.1 (i).

(ii) Sei $\boldsymbol{\Psi} : \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0} \to \mathcal{P}(B_M^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(0)) \setminus \{\boldsymbol{\varnothing}\}$ mit $\boldsymbol{\Psi}(U) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_U := L^p(I,U) \cap_{\boldsymbol{j}_U} L^q(I,H_U)$ für $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$, sodass für

$$\mathbf{L}_U := \bigcup_{\substack{Z \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0} \\ Z \supseteq U}} \boldsymbol{\Psi}(Z) \subseteq B_M^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(0)$$

ein $\boldsymbol{y} \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}} \overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^*)}$ existiert. Dann existieren zu jedem $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ Folgen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ und $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}$ mit $U \subseteq U_n \subseteq U_{n+1}$ und $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{\Psi}(U_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}.$$

Beweis: Es handelt sich um eine instationäre Verallgemeinerung von [BH72, Proposition 11]. Die Argumente sind jedoch dieselben und werden nur an einigen Stellen angepasst.

ad (i) Da $R(j)$ dicht in H liegt, existiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$, sodass $ja_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{y}_0$ in H. Dann ist

$$U := \overline{\langle \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle}^{\|\cdot\|_V} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0},$$

also $\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0} \neq \boldsymbol{\varnothing}$. Weiter gilt für $v \in V$ und $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$, dass $\overline{\langle v, U \rangle}^{\|\cdot\|_V} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$, also $\bigcup_{U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}} U = V$. Damit ist $(U, \boldsymbol{y}_0)_{U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}}$ eine Galerkin-Basis im Sinne von Bemerkung 6.1 (i).

ad (ii) Man geht in zwei Schritten vor:

Schritt 1: Zunächst zeigt man für fixiertes $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ die Existenz einer Folge $(\boldsymbol{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boldsymbol{S}_n = (U_{n,j})_{1\leq j\leq r(n)} \subseteq \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ und von Elementen $\boldsymbol{y}_{U_{n,j}} \in \boldsymbol{\Psi}(U_{n,j})$ mit $1 \leq j \leq r(n)$, $r(n), n \in \mathbb{N}$, sodass

(1) $\boldsymbol{y} \in \overline{\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 1\leq j\leq r(n)}} \{\boldsymbol{y}_{U_{n,j}}\}}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^*)}$.

(2) Für $1 \leq m < m_1$, $1 \leq j \leq r(m)$ und $1 \leq j_1 \leq r(m_1)$ gilt $U \subseteq U_{m,j} \subseteq U_{m_1,j_1}$.

Dazu zeigt man per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt:

(IV) Es existieren $(\mathbf{S}_m)_{m=1,\dots,n-1}$, sodass für $1 \leq m \leq n-1$ gilt:

(i) $\mathbf{S}_m = (U_{m,j})_{1 \leq j \leq r(m)} \subseteq \mathcal{U}$ mit $U_{m,j} \supseteq U$ für $1 \leq j \leq r(m)$.

(ii) Für $m < m_1 \leq n-1$, $1 \leq j \leq r(m)$ und $1 \leq j_1 \leq r(m_1)$ gilt $U_{m,j} \subseteq U_{m_1,j_1}$.

(iii) Es existieren $\boldsymbol{y}_{U_{m,j}} \in \boldsymbol{\Psi}(U_{m,j})$ mit $1 \leq j \leq r(m)$, sodass zu $(\boldsymbol{v}_s^*)_{s=1,\dots,m} \subseteq B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$ ein $1 \leq j \leq r(m)$ existiert, sodass für alle $1 \leq s \leq m$

$$|\langle \boldsymbol{v}_s^*, \boldsymbol{y}_{U_{m,j}} - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < \frac{1}{m}.$$

(IA) Für $Z \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ mit $Z \supseteq U$ und $\boldsymbol{y}_Z \in \boldsymbol{\Psi}(Z)$ definiert

$$\mathbf{Y}_{Z,\boldsymbol{y}_Z,1} := \{\boldsymbol{v}^* \in B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0) \mid |\langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{y}_Z - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < 1\}$$

eine bezüglich der Teilraumtopologie von $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}^*, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{**})$ auf $B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$ offene Menge. Gleichzeitig ist für $\boldsymbol{v}^* \in B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$ die Menge $\mathbf{Z}_{\boldsymbol{v}^*} := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \mid |\langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < 1\}$ eine bezüglich $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^*)$ offene Umgebung von $\boldsymbol{y} \in \overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^*)}$. Dann existieren $Z \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ mit $Z \supseteq U$ und $\boldsymbol{y}_Z \in \boldsymbol{\Psi}(Z)$ mit $\boldsymbol{y}_Z \in \mathbf{Z}_{\boldsymbol{v}^*}$, das heißt $|\langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{y}_Z - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < 1$. Damit ist

$$(\mathbf{Y}_{Z,\boldsymbol{y}_Z,1})_{\substack{Z \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}, Z \supseteq U \\ \boldsymbol{y}_Z \in \boldsymbol{\Psi}(Z)}}$$

eine bezüglich der Teilraumtopologie von $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}^*, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{**})$ auf $B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$ offene Überdeckung von $B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$. Gemäß der Sätze 2.8 (i) und 3.11 sind $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ reflexiv, sodass nach dem Satz von Kakutani (cf. Satz A.5) der abgeschlossene Ball $B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$ bezüglich $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}^*, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{**})$ und damit auch bezüglich der Teilraumtopologie von $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}^*, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{**})$ auf $B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$ kompakt ist. Das heißt es existiert eine endliche Teilüberdeckung. Genauer existieren $(U_{1,j})_{1 \leq j \leq r(1)} \subseteq \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ mit $U_{1,j} \supseteq U$, $r(1) \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{y}_{U_{1,j}} \in \boldsymbol{\Psi}(U_{1,j})$, sodass

$$B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0) \subseteq \bigcup_{j=1}^{r(1)} \mathbf{Y}_{U_{1,j},\boldsymbol{y}_{U_{1,j}},1}.$$

Zu jedem $\boldsymbol{v}^* \in B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$ existiert dann ein $1 \leq j \leq r(1)$, sodass für $\boldsymbol{y}_{U_{1,j}} \in \boldsymbol{\Psi}(U_{1,j})$ gilt, dass $|\langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{y}_{U_{1,j}} - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < 1$. Mit $S_1 := (U_{1,j})_{1 \leq j \leq r(1)}$ folgt der Induktionsanfang.

(IS) Man nehme an, es gelte (IV) für n. Definiere nun $\widehat{U}_n := \overline{\left\langle \bigcup_{j=1}^{r(n-1)} U_{n-1,j} \right\rangle}^{\|\cdot\|_V} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$. Für $(\boldsymbol{v}_s^*)_{s=1,\dots,n} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ist auch $\mathbf{Z}_{(\boldsymbol{v}_1^*,\dots,\boldsymbol{v}_n^*)} := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \mid |\langle \boldsymbol{v}_s^*, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < n^{-1} \text{ für alle } 1 \leq s \leq n\}$ eine bezüglich $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^*)$ offene Umgebung von $\boldsymbol{y} \in \overline{\mathbf{L}_{\widehat{U}_n}}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^*)}$. Dann existieren $Z \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ mit $Z \supseteq \widehat{U}_n$ und $\boldsymbol{y}_Z \in \boldsymbol{\Psi}(Z)$ mit $\boldsymbol{y}_Z \in \mathbf{Z}_{(\boldsymbol{v}_1^*,\dots,\boldsymbol{v}_n^*)}$, das heißt

$$|\langle \boldsymbol{v}_s^*, \boldsymbol{y}_Z - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < n^{-1}$$

für alle $1 \leq s \leq n$. Daher sind die Mengen

$$\mathbf{Y}_{Z,\boldsymbol{y}_Z,n} := \{(\boldsymbol{v}_1^*, \dots, \boldsymbol{v}_n^*)^T \in (B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0))^n \mid |\langle \boldsymbol{v}_s^*, \boldsymbol{y}_Z - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < n^{-1} \text{ für alle } 1 \leq s \leq n\}$$

für $Z \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ mit $Z \supseteq \widehat{U}_n$ und $\boldsymbol{y}_Z \in \boldsymbol{\Psi}(Z)$ eine bezüglich der Teilraumtopologie von $\tau((\boldsymbol{\mathcal{X}}^n)^*, (\boldsymbol{\mathcal{X}}^n)^{**})$ auf $(B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0))^n$ offene Überdeckung von $(B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0))^n$. Nach dem Satz von Tychonoff (cf. Satz A.2) ist $(B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0))^n$ kompakt bezüglich $\tau((\boldsymbol{\mathcal{X}}^n)^*, (\boldsymbol{\mathcal{X}}^n)^{**})$ und damit auch bezüglich der Teilraumtopologie von $\tau((\boldsymbol{\mathcal{X}}^n)^*, (\boldsymbol{\mathcal{X}}^n)^{**})$ auf $(B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0))^n$, das heißt es existiert wieder eine endliche Teilüberdeckung. Genauer existieren wieder $(U_{n,j})_{1\leq j\leq r(n)} \subseteq \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ mit $r(n) \in \mathbb{N}$, $U_{n,j} \supseteq \widehat{U}_n$ und $\boldsymbol{y}_{U_{n,j}} \in \boldsymbol{\Psi}(U_{n,j})$ für $1 \leq j \leq r(n)$, sodass

$$(B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0))^n \subseteq \bigcup_{j=1}^{r(n)} \mathbf{Y}_{U_{n,j},\boldsymbol{y}_{U_{n,j}},n}.$$

Zu $(\boldsymbol{v}_s^*)_{s=1,\dots,n} \subseteq B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$, das heißt $(\boldsymbol{v}_1^*, \dots, \boldsymbol{v}_n^*)^T \in (B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0))^n$, existiert dann ein $1 \leq j \leq r(n)$, sodass für $\boldsymbol{y}_{U_{n,j}} \in \boldsymbol{\Psi}(U_{n,j})$ gilt, dass $|\langle \boldsymbol{v}_s^*, \boldsymbol{y}_{U_{n,j}} - \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < n^{-1}$ für alle $1 \leq s \leq n$. Definiere schließlich $\boldsymbol{S}_n := (U_{n,j})_{1\leq j\leq r(n)}$. Dann vervollständigt $\boldsymbol{S}_n$ und die zugehörigen $(\boldsymbol{y}_{U_{n,j}})_{1\leq j\leq r(n)}$ die Folge $(\boldsymbol{S}_m)_{m=1,\dots,n-1}$, sodass die obigen Bedingungen (i) bis (iii) auch für $1 \leq m \leq n$ erfüllt bleiben. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und Induktion über $n \in \mathbb{N}$ sichert die Existenz der Folge $(\boldsymbol{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche den Bedingungen (i) bis (iii) und damit (2) genügt. Bedingung (iii) impliziert $\boldsymbol{y} \in \overline{\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 1\leq j\leq r(n)}} \{\boldsymbol{y}_{U_{n,j}}\}}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)}$ und damit (1).

Schritt 2: Definiere den separablen und reflexiven Banachraum

$$U_0 := \overline{\left\langle \bigcup_{1\leq j\leq r(n), n\in\mathbb{N}} U_{n,j} \right\rangle}^{\|\cdot\|_V}.$$

Dann sind auch $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0 := \boldsymbol{\mathcal{X}}_{U_0}$ und $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0^*$ gemäß der Sätze 2.8 (i), (ii), 3.9 und 3.11 separabel und reflexiv. Das heißt es existiert eine Folge $(\boldsymbol{v}_s^*)_{s\in\mathbb{N}} \subseteq B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}_0^*}(0)$, sodass $\langle \{\boldsymbol{v}_s^* \mid s \in \mathbb{N}\}\rangle$ dicht in $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0^*$ liegt. Wegen $\boldsymbol{y}_{U_{n,j}} \in \boldsymbol{\Psi}(U_{n,j}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{U_{n,j}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_0$ und Punkt (1) in Schritt 1 gilt auch $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_0$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (cf. Satz A.4) existieren normerhaltende Fortsetzungen $(\overline{\boldsymbol{v}}_s^*)_{s\in\mathbb{N}} \subseteq B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$ mit $(\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_0})^* \overline{\boldsymbol{v}}_s^* = \boldsymbol{v}_s^*$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0^*$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und zu $(\overline{\boldsymbol{v}}_s^*)_{s=1,\dots,n} \subseteq B_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*}(0)$ existiert gemäß Schritt 1 (IV) (iii) ein $1 \leq j \leq r(n)$, sodass für $U_n := U_{n,j}$ und das zugehörige $\boldsymbol{y}_n := \boldsymbol{y}_{U_{n,j}} \in \boldsymbol{\Psi}(U_n)$ gilt, dass

$$|\langle \boldsymbol{v}_s^*, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_0}| = |\langle (\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_0})^* \overline{\boldsymbol{v}}_s^*, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_0}| = |\langle \overline{\boldsymbol{v}}_s^*, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}| < \frac{1}{n}$$

für alle $1 \leq s \leq n$. Da die Folge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_M^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(0)$ beschränkt ist und die lineare Hülle von $\{\boldsymbol{v}_s^* \mid s \in \mathbb{N}\}$ nach Definition dicht in $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0^*$ liegt, erhält man daraus $\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0 \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}$. ■

Satz 7.2: (Existenzsatz mit nichtseparablem V) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ wie in Bemerkung 5.3. Des Weiteren gelte:

(1) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0 : \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ist monoton.

(2) $\boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_j \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ist beschränkt.

(3) $\boldsymbol{\mathcal{A}} := \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_j \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ und der verallgemeinerten Bedingung (M).

Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in H$ eine Lösung $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ von (1).

Beweis: Es reicht wieder den Fall $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ zu betrachten.

1. Galerkin-Ansatz: Sei $\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ wie in Lemma 7.1 (i). Das heißt $(U, \boldsymbol{y}_0)_{U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}}$ ist eine Galerkin-Basis im Sinne von Bemerkung 6.1 (i) und damit das Galerkin-System bezüglich $(U, \boldsymbol{y}_0)_{U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}}$ wohldefiniert. Es soll $\boldsymbol{y}_U \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_U$ **Galerkin-Lösung zu** U heißen, falls

$$\begin{aligned} \frac{d_{eU}\boldsymbol{y}_U}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}_U \boldsymbol{y}_U &= \boldsymbol{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*, \\ (\boldsymbol{j}_U \boldsymbol{y}_U)(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H_U. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Existenz der Galerkin-Lösungen und a-priori Abschätzungen: Ziel ist es Satz 6.2 anzuwenden. Wie in Bemerkung 6.1 sieht man leicht ein, dass (4) eine verallgemeinerte Evolutionsgleichung im Sinne von Definition 5.6 darstellt. Jedes $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ ist laut Definition separabel und als abgeschlossener Unterraum des reflexiven Raums V selbst reflexiv. Es gilt daher nur noch die Eigenschaften der eingeschränkten Operatoren zu prüfen. Aus Lemma 2.17 folgt unmittelbar:

(i) $(\boldsymbol{\mathcal{A}}_0)_U := (\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U})^* \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*$ ist monoton.

(ii) $\boldsymbol{\mathcal{B}}_U := \boldsymbol{\mathcal{B}}_{(\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U}, \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_U})} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*$ ist beschränkt.

(iii) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_U := (\boldsymbol{\mathcal{A}}_0)_U + \boldsymbol{\mathcal{B}}_U : \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*$ genügt der verallgemeinerten Bedingung (M).

Es bleibt die Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*$ zu prüfen. Sei also $K \geq 0$ beliebig. Weiter sei $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U$, sodass

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{u})(t)\|_H^2 + \left\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_U \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\chi_{[0,t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U} \leq K$$

für alle $t \in \overline{I}$. Wegen $\left\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_U \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\chi_{[0,t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U} = \left\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\chi_{[0,t]} \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ folgt aus der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ die Existenz einer Konstanten $M := M(K, \boldsymbol{\mathcal{A}}) > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U} = \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M$$

und damit die Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*$ von $\boldsymbol{\mathcal{A}}_U : \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \cap_{\boldsymbol{j}_U} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_U \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_U^*$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 6.2 erfüllt und für jedes $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ die Existenz einer Galerkin-Lösung $\boldsymbol{y}_U \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_U$ zu U gesichert.

Testet man nun (4) mit $\boldsymbol{y}_U \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_U$, dann erhält man wie in Satz 6.2 (2.3) (ii) (a) von $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ unabhängige Konstanten $M, M' > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{y}_U\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M \text{ und } \|\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_U\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*} \leq M'$$

für alle $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$. Damit ist der Lösungsoperator $\boldsymbol{\Psi} : \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0} \to \mathcal{P}(B_M^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(0)) \setminus \{\boldsymbol{\varnothing}\}$ mit

$$\boldsymbol{\Psi}(U) := \{\boldsymbol{y}_U \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_U \mid \boldsymbol{y}_U \text{ ist Galerkin-Lösung zu } U\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_U \text{ für } U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0},$$

wohldefiniert. Definiere weiter

$$\mathbf{L}_U := \bigcup_{\substack{Z \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0} \\ Z \supseteq U}} \boldsymbol{\Psi}(Z) \neq \boldsymbol{\varnothing}.$$

3. Grenzübergang:

3.1 Konstruktion des schwachen Grenzwerts: Ziel ist es im Folgenden zu zeigen, dass

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}} \overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)} \neq \emptyset,$$

sodass Lemma 7.1 anwendbar ist. Dies erreicht man mit dem Vorgehen wie in [Růž04, Kapitel 3, Satz 3.43], welches vor allem auf dem endlichen Durchschnittsprinzip (cf. Lemma A.3) beruht.

Nach Konstruktion ist $\mathbf{L}_Z \subseteq \mathbf{L}_W$ für $W \subseteq Z$. Da $\overline{\langle Z \cup W\rangle}^{\|\cdot\|_V} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ für beliebige $Z, W \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ gilt, erhält man auch

$$\emptyset \neq \mathbf{L}_{\overline{\langle Z\cup W\rangle}^{\|\cdot\|_V}} \subseteq \mathbf{L}_Z \cap \mathbf{L}_W.$$

Induktiv folgt für beliebige $U_i \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ mit $1 \leq i \leq n$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{L}_{U_i} \neq \emptyset.$$

Demzufolge ist $(\overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)})_{U\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}}$ ein zentriertes System bezüglich $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)$ abgeschlossener Mengen. Aus der Definition folgt direkt, dass

$$\overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)} \subseteq B_M^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(0)$$

für alle $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$. Der Satz von Kakutani (cf. Satz A.5) sichert weiter, dass $B_M^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(0)$ bezüglich $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)$ kompakt ist. Damit ist das zentrierte System $(\overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)})_{U\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}}$ in einer bezüglich $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)$ kompakten Menge enthalten. Schließlich liefert das endliche Durchschnittsprinzip (cf. Lemma A.3), dass

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}} \overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)} \neq \emptyset.$$

Genauer folgt die Existenz eines Elements $\boldsymbol{y} \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}} \overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{\mathcal{X}}^*)}$. Insgesamt sind die Voraussetzungen von Lemma 7.1 erfüllt, welches nun den Grenzübergang ermöglichen soll.

3.2 Lokale Regularität und Anfangswerte: Sei $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ beliebig aber fixiert. Jetzt liefert Lemma 7.1 die Existenz von Folgen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ mit

$$U \subseteq U_n \subseteq U_{n+1} \text{ und } \boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{\Psi}(U_n) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{U_n} \tag{5}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}, \\ \frac{d_{e_{U_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}_{U_n}\boldsymbol{y}_n &= \mathbf{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{U_n}, \\ (\boldsymbol{j}_{U_n}\boldsymbol{y}_n)(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H_{U_n}. \end{aligned} \tag{6}$$

Definiere nun zu diesem $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ und der in Lemma 7.1 konstruierten Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den separablen und reflexiven Banachraum

$$\widehat{U} := \overline{\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \right\rangle}^{\|\cdot\|_V} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}.$$

Dann ist insbesondere $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}} \cap_{\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}$. Die schwache Abgeschlossenheit von $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}$ bezüglich $\tau(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^*)$ liefert dann auch $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}$. Wegen

$$\|\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}} = \|\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M \text{ und } \|\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}}} = \|(\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}})^*\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}}} \leq \|\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*} \leq M'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erhält man zusätzlich eine Teilfolge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}} \cap_{\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}$ mit $\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}} \subseteq \mathbb{N}$ und ein Element $\boldsymbol{\xi}_{\widehat{U}} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}}$, sodass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y} \text{ in } L^\infty(I, H_{\widehat{U}}) \ (n \to \infty, n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}), \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\xi}_{\widehat{U}} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}} \ (n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}). \end{aligned}$$

Nun befindet man sich in der Situation von 6.2 (3.1), wobei dort $\widehat{U}$ die Rolle von V mit Galerkin-Basis $(U_n, \boldsymbol{y}_0)_{n\in\mathbb{N}}$ einnimmt, sodass man in diesem Beweis direkt zum Ende von (3.4) springen könnte. Um zu zeigen, dass dabei keinerlei Schwierigkeiten auftreten, werden die einzelnen Schritte in der Folge dennoch im Detail ausgeführt.

Sei also $u \in \bigcup_{n\in\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}} U_n$ beliebig. Dann existiert wegen der aufsteigenden Struktur in (5) ein $n_0 \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}$, sodass $u \in U_n$ für alle $n \geq n_0$ mit $n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}$. Testen von (6) für $n \geq n_0$ $(n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}})$ mit $u\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{U_n}$, wobei $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T) = 0$, liefert nach anschließendem Grenzübergang $(n \to \infty, n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}})$ wie in Satz 6.2 (3.2) die Identität

$$\langle \boldsymbol{\xi}_{\widehat{U}}, u\varphi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} = \langle e_{\widehat{U}}(u)\varphi', \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} + (\boldsymbol{y}_0, ju)_{H_{\widehat{U}}}\varphi(0) \tag{7}$$

für alle $u \in \widehat{U}$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T) = 0$. Für $\varphi \in C_0^\infty(I)$ folgt speziell, dass $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{\widehat{U}}$ mit

$$\frac{d_{e_{\widehat{U}}}\boldsymbol{y}}{dt} = -\boldsymbol{\xi}_{\widehat{U}} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}} \tag{8}$$

und mit Satz 5.5 (iii) insbesondere, dass

$$\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}. \tag{9}$$

Damit kann man in (7) gemäß Satz 5.5 (iv) partiell integrieren und erhält

$$((\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y})(0) - \boldsymbol{y}_0, ju)_{H_{\widehat{U}}}\varphi(0) = 0$$

für alle $u \in \widehat{U}$. Nun kann man wegen $(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y})(0), \boldsymbol{y}_0 \in H_{\widehat{U}}$ wie in Satz 6.2 folgern, dass $(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y})(0) = \boldsymbol{y}_0$ in $H_{\widehat{U}}$, das heißt $(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) = \boldsymbol{y}_0$ in H. Die Anfangswertbedingung ist demnach bereits erfüllt, aber es gelten nur lokale Regularitätseigenschaften. Das weitere Vorgehen besteht nun darin, mit diesen lokalen Regularitätseigenschaften weitere lokale Informationen zu folgern, mit denen man schließlich eine globale Aussage treffen kann.

3.3 Schwache Konvergenz in $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}} \cap_{\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}$: Sei wieder $t \in (0,T]$ beliebig aber fixiert. Wegen $\|\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}} = \|\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M$ für alle $n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}$ und $((\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}_n)(t))_{n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}} \subseteq H_{\widehat{U}}$ existieren zunächst eine von $t \in (0,T]$ abhängende Teilfolge $((\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}_n)(t))_{n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}} \subseteq H_{\widehat{U}}$ mit $\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t} \subseteq \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}$ und ein $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}} \in H_{\widehat{U}}$, sodass

$$(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}_n)(t) \overset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}} \text{ in } H_{\widehat{U}} \ (n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}).$$

Für $u \in \bigcup_{n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}} U_n$, das heißt $u \in U_n$ für alle $n \geq n_{0,t}$ mit $n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}$ und ein geeignetes $n_{0,t} \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}$, liefert Testen von (6) für $n \geq n_{0,t}$ $(n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t})$ mit $u\varphi\chi_{[0,t]} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{U_n}$, wobei $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(t) = 1$, und anschließendem Grenzübergang $(n \to \infty, n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t})$ die Identität

$$\langle \boldsymbol{\xi}_{\widehat{U}} \chi_{[0,t]}, u\varphi \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} = \langle e_{\widehat{U}}(u)\varphi', \boldsymbol{y}\chi_{[0,t]} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} - (\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}}, ju)_{H_{\widehat{U}}}$$

für alle $u \in \widehat{U}$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(t) = 1$. Dabei wurde wie in Satz 6.2 (3.3) ausgenutzt, dass aufgrund der aufsteigenden Struktur in (5) die Mengengleichheit $\bigcup_{n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ gilt. Mit der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Satz 5.5 (iv)) erhält man daraus

$$((\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y})(t) - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}}, ju)_{H_{\widehat{U}}} = 0$$

für alle $u \in \widehat{U}$. Wegen $(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y})(t) \in H_{\widehat{U}}$ (cf. (9)) gilt dann

$$(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y})(t) = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t}} \text{ in } H_{\widehat{U}}.$$

Da diese Argumentation für jede Teilfolge von $((\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}_n)(t))_{n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}} \subseteq H_{\widehat{U}}$ wahr bleibt, ist $(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y})(t) \in H_{\widehat{U}}$ schwacher Häufungspunkt jeder Teilfolge von $((\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}_n)(t))_{n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}} \subseteq H_{\widehat{U}}$. Das Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1) liefert erneut, dass bereits $\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U},t} = \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}$ gewählt werden kann, das heißt

$$(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}_n)(t) \overset{n \to \infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y})(t) \text{ in } H_{\widehat{U}} \ (n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}})$$

für alle $t \in \overline{I}$. Mit $\|\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}} = \|\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M$ für alle $n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}$ und Satz 3.3 folgt dann

$$\boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}_n \overset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{j}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}.$$

Die Charakterisierung der schwachen Konvergenz in Schnitten (cf. Folgerung 2.9) liefert schließlich wieder

$$\boldsymbol{y}_n \overset{n \to \infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}} \cap_{\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}.$$

Jetzt hat man hinreichende Konvergenzeigenschaften von $(\boldsymbol{y}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}} \cap_{\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}}$ nachgewiesen und nutzt wie in Satz 6.2 die verallgemeinerte Bedingung (M) von $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}} \cap_{\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}}$, die sich gemäß Lemma 2.17 von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ vererbt, um $\boldsymbol{\xi}_{\widehat{U}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}} \boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}}$ zu identifizieren.

3.4 Identifikation von $\boldsymbol{\xi}_{\widehat{U}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}$: Durch Testen von (6) für $n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}$ mit $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{U_n}$ erhält man analog zu Satz 6.2 (2.3) (ii) (a) für $\tau_n(\boldsymbol{y}_n) \equiv 1$ die Abschätzung

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} \leq -\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|^2_{H_{\widehat{U}}} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|^2_{H_{\widehat{U}}}$$

für alle $n \in \boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}$. Daraus folgert man mit den selben Argumenten wie in Satz 6.2

$$\begin{aligned}
\limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}}} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} &\leq \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}}} \left[-\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|^2_{H_{\widehat{U}}} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|^2_{H_{\widehat{U}}}\right] \\
&= -\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\boldsymbol{\Lambda}_{\widehat{U}}}} \frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|^2_{H_{\widehat{U}}} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|^2_{H_{\widehat{U}}} \\
&\leq -\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y})(T)\|^2_{H_{\widehat{U}}} + \frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y})(0)\|^2_{H_{\widehat{U}}} \\
&= -\left\langle \frac{d_{e_{\widehat{U}}}\boldsymbol{y}}{dt}, \boldsymbol{y}\right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} = \langle \boldsymbol{\xi}_{\widehat{U}}, \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}}.
\end{aligned}$$

und mit der verallgemeinerten Bedingung (M) von $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}} \cap_{\boldsymbol{j}_{\widehat{U}}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\widehat{U}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}}$, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}_{\widehat{U}}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}}$, also

$$\begin{aligned}
\frac{d_{e_{\widehat{U}}}\boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\widehat{U}}, \\
(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H.
\end{aligned} \tag{10}$$

3.5 Globale Regularität und Gültigkeit der verallgemeinerten Evolutionsgleichung: Seien nun $u \in U$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$ beliebig. Testen von $(10)_1$ mit $u\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}$ liefert unter Anwendung der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel die Identität

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}, u\varphi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\widehat{U}}\boldsymbol{y}, u\varphi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} = \left\langle -\frac{d_{e_{\widehat{U}}}\boldsymbol{y}}{dt}, u\varphi\right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} = \langle e_{\widehat{U}}(u)\varphi', \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\widehat{U}}} = \langle e(u)\varphi', \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $u \in U$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Da $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ in (3.2) beliebig gewählt war, lässt sich die gesamte Argumentation für alle $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ wiederholen und es folgt sogar

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}, u\varphi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle e(u)\varphi', \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $u \in V$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Schließlich ist $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ mit

$$\begin{aligned}
\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*, \\
(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz 7.2 vollständig. ■

Bemerkung 7.3: (Vereinfachter Existenzsatz für nichtseparables V) Mit Satz 7.2 gilt Folgerung 6.3 auch ohne Separabilität von V.

8 Verallg. Prä-Evolutionsgleichungen

Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ und $\frac{2d}{d+2} \leq p < \infty$ ist

$$(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), \mathrm{id})$$

ein Evolutionstripel, da in diesem Fall die dichte Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gilt. Es kann für die Anwendung aber zusätzlich interessant sein, niedrigere Werte von p zu betrachten. Da man dort zumeist an distributionellen Identitäten in $\mathcal{D}'(I \times \Omega)$ interessiert ist, ist es weniger wichtig den ganzen Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ als Testfunktionenraum zu nutzen, sondern $C_0^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$. Gleichzeitig gilt $C_0^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und die Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist für alle $1 < p < \infty$ dicht, sodass auch

$$(W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega), L^2(\Omega), \mathrm{id})$$

ein Evolutionstripel ist. In diesem Fall kann man also die Evolutionstripel-Struktur austauschen und erhält ähnlich gute Resultate. Die allgemeine Struktur, welche dies ermöglicht, soll in der Folge eingeführt und untersucht werden.

Definition 8.1: (Prä-Evolutionstripel) Sei (V, H) ein kompatibles Paar, wobei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum ist, sodass

$$\overline{V \cap_j H}^{\|\cdot\|_V} = V \text{ und } \overline{R(j)}^{\|\cdot\|_H} = \overline{j(V \cap_j H)}^{\|\cdot\|_H} = H.$$

Dann bezeichnet man die Struktur (V, H, j) als ein sogenanntes **Prä-Evolutionstripel**.

Bemerkung 8.2: Sei (V, H, j) ein Prä-Evolutionstripel mit reflexivem V.

(i) Evolutionstripel-Struktur: Aus der Definition folgt direkt, dass $(V \cap_j H, H, j)$ ein Evolutionstripel mit kanonischer Einbettung $e := j^* R j : V \cap_j H \to (V \cap_j H)^* = V^* +_{j^*} H^*$ ist.

(ii) Identität: Bezeichne wieder $\mathscr{I} : V \cap_j H \to V$ die Identität, wenn $V \cap_j H$ mit der $\|\cdot\|_{V \cap_j H}$-Topologie versehen ist. Dann sind $\mathscr{I}$ und $\mathscr{I}^* : V^* \to V^* +_{j^*} H^*$ mit

$$\langle \mathscr{I}^* v^*, v \rangle_{V \cap_j H} = \langle v^*, v \rangle_V$$

für alle $v \in V \cap_j H$ und $v^* \in V^*$ stetig. Satz A.12 (iii) liefert $N(\mathscr{I}^*)^\perp = \overline{R(\mathscr{I})}^{\|\cdot\|_V} = V$ und damit die Injektivität von $\mathscr{I}^* : V^* \to V^* +_{j^*} H^*$. Das heißt die Abbildung

$$e_{\mathscr{I}} := (\mathscr{I}^*)^{-1} e : e^{-1}(R(\mathscr{I}^*)) \subseteq V \cap_j H \to V^*$$

ist wohldefiniert und injektiv, aber im Allgemeinen keine Einbettung.

(iii) Räume: Da im Fall eines Prä-Evolutionstripels (V, H, j) für $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$ die Räume $L^p(I, V)$ und $L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^p(I, H)$ im Allgemeinen nicht zusammenfallen und damit nicht wie aus Satz 6.2 die vereinfachte Form in Folgerung 6.3 abgeleitet werden kann, betrachtet man nun separat

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \{L^p(I, V), L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, H)\}.$$

Das heißt es kann sowohl $\boldsymbol{\mathcal{X}} = L^p(I,V)$, als auch $\boldsymbol{\mathcal{X}} = L^p(I,V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,H)$ gelten. Falls ein Resultat nur für einen der beiden Fälle gilt, wird in der Folge darauf hingewiesen. Zur Unterscheidung zum ursprünglichen Fall eines klassischen Evolutionstripels setzt man zusätzlich

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} &:= L^p(I, V \cap_j H) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,H),\\ \boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathscr{I}} &:= \left\{ \boldsymbol{v} \in W_e^{1,p,q'}(I, V \cap_j H, V^* +_{j^*} H^*) \,\middle|\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}, \frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}} \right\}.\end{aligned}$$

Für reflexives V gilt $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}} = L^{p'}(I, V^* +_{j^*} H^*) +_{\boldsymbol{j}^*} L^{q'}(I, H^*)$ (cf. Satz 2.8 (iii)). Gemäß Bemerkung 3.18 (ii) gilt die Mengengleichheit

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} = L^p(I,V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,H)$$

mit Normäquivalenz. Bezeichne $\boldsymbol{\mathscr{I}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}$ mit $\boldsymbol{\mathscr{I}} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ die Identität interpretiert als stetiger Operator bezüglich der starken $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}$-Topologie. Es liegt $C_0^\infty(I, V \cap_j H) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}$ dicht in $L^p(I,V)$, da $V \cap_j H$ nach Voraussetzung dicht in V liegt. Da damit auch die Einbettung $\boldsymbol{\mathscr{I}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}} \in \{L^p(I,V), L^p(I,V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,H)\}$ dicht ist, liefert Satz A.12 (iii) erneut $N(\boldsymbol{\mathscr{I}}^*)^\perp = \overline{R(\boldsymbol{\mathscr{I}})}^{\|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}$. Das heißt

$$\boldsymbol{\mathscr{I}}^* : \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \in \{L^{p'}(I,V^*), L^{p'}(I,V^*) +_{\boldsymbol{j}^*} L^{q'}(I,H^*)\} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$$

ist eine Einbettung. Im Fall $\boldsymbol{\mathcal{X}} = L^p(I,V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,H)$ ist $\boldsymbol{\mathscr{I}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}$ wie bereits erwähnt ein Isomorphismus und entsprechend auch $\boldsymbol{\mathscr{I}}^* : \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$. Des Weiteren sind

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}) &= (\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}, L^1(I, R(e_V) + R(e_H)), \boldsymbol{e}_V, \boldsymbol{e}_H \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}})\\ \text{und } (\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}) &= (\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}, L^1(I,H), \boldsymbol{j}, \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}})\end{aligned}$$

kompatible Paare und für $\boldsymbol{j} := \boldsymbol{e}_H^{-1} \boldsymbol{e}_V$ sind

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \text{ und } \boldsymbol{j} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{Y}}.$$

wohldefiniert mit Normäquivalenz.

Als nächstes soll ein Ableitungsbegriff eingeführt werden, der es ermöglicht, im Falle eines Prä-Evolutionstripels (V,H,j) ein instationäres Problem als Operatorgleichung in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ auszudrücken.

Definition 8.3: (Verallgemeinerte Zeitableitung bezüglich Prä-Evolutionstripel) Sei (V,H,j) ein Prä-Evolutionstripel mit reflexivem V, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \le q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathscr{I}}$ wie in Bemerkung 8.2 sowie $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \{L^p(I,V), L^p(I,V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I,H)\}$. Dann besitzt $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}$ eine **verallgemeinerte Zeitableitung bezüglich** $e_{\mathscr{I}}$, falls ein $\tilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ existiert, sodass

$$-\int_I (j(\boldsymbol{v}(s)), jv)_H \varphi'(s) ds = \langle \tilde{\boldsymbol{v}}, v\varphi \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $v \in V \cap_j H$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Definiere dann

$$\frac{d_{e_{\mathscr{I}}} \boldsymbol{v}}{dt} := \tilde{\boldsymbol{v}} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \text{ und } \boldsymbol{\mathcal{W}}_{e_{\mathscr{I}}} := \left\{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \,\middle|\, \exists \frac{d_{e_{\mathscr{I}}} \boldsymbol{v}}{dt} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \right\}.$$

Bemerkung 8.4: (Eigenschaften von $\frac{d_{e_{\mathscr{J}}}}{dt}$)

(i) (Wohldefiniertheit): Hat $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{J}}$ eine verallgemeinerte Zeitableitung bezüglich $e_{\mathscr{J}}$ gemäß Definition 8.3, dann ist $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathscr{J}}$ mit

$$\frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{\mathscr{J}}^* \frac{d_{e_{\mathscr{J}}} \boldsymbol{v}}{dt} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{J}}.$$

Aufgrund der Injektivität von $\boldsymbol{\mathscr{J}}^* : \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{J}}$ ist $\frac{d_{e_{\mathscr{J}}} \boldsymbol{v}}{dt} = (\boldsymbol{\mathscr{J}}^*)^{-1} \frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ wohldefiniert und mithin der Raum $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{e_{\mathscr{J}}}$. Weiter ergibt sich die alternative Charakterisierung

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{e_{\mathscr{J}}} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathscr{J}} \;\middle|\; \frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt} \in \boldsymbol{\mathscr{J}}^*(\boldsymbol{\mathcal{X}}^*) \right\}.$$

(ii) (Linearität): Da $(\boldsymbol{\mathscr{J}}^*)^{-1}$ und $\frac{d_e}{dt}$ linear sind, ist auch $\frac{d_{e_{\mathscr{J}}}}{dt}$ linear.

(iii) (Konsistenz): Ist (V, H, j) ein Evolutionstripel, dann ist gemäß Bemerkung 2.5 (i) $V = V \cap_j H$, sodass Definition 8.3 der alternativen Charakterisierung von $\frac{d_e}{dt}$ in Lemma 5.4 entspricht. Insgesamt gilt dann $\frac{d_{e_{\mathscr{J}}}}{dt} = \frac{d_e}{dt}$.

Definition 8.5: (Verallgemeinerte Prä-Evolutionsgleichung) Sei (V, H, j) ein Prä-Evolutionstripel mit reflexivem V, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}} := C^0(\overline{I}, H)$, $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{e_{\mathscr{J}}}$ wie in Definition 8.3 und $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \{L^p(I, V), L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, H)\}$. Des Weiteren sei $\boldsymbol{y}_0 \in H$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ und $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ein Operator. Dann heißt eine Anfangswertaufgabe der Form

$$\begin{aligned} \frac{d_{e_{\mathscr{J}}} \boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{f} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*, \\ (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H \end{aligned} \tag{11}$$

verallgemeinerte (nichtlineare) Prä-Evolutionsgleichung.

Bemerkung 8.6: (Äquivalente Charakterisierung) Gemäß Definition 8.3 ist die Identität $(11)_1$ äquivalent zu

$$-\int_I (j(\boldsymbol{y}(s)), jv)_H \varphi'(s) ds + \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}, v\varphi \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle \boldsymbol{f}, v\varphi \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $v \in V \cap_j H$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Dies entspricht der üblichen schwachen Formulierung instationärer Probleme. Die Einschränkung, dass nun $V \cap_j H$ statt der ganze Raum V betrachtet wird, ist vernachlässigbar, da in der Anwendung häufig nur wichtig ist, dass $C_0^\infty(\Omega) \subseteq V \cap_j H$.

Satz 8.7: (Existenzsatz für Prä-Evolutionstripel) Sei (V, H, j) ein Prä-Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}} := C^0(\overline{I}, H)$, $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{e_{\mathscr{J}}}$ wie in Definition 8.3 und $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \{L^p(I, V), L^p(I, V) \cap_{\boldsymbol{j}} L^q(I, H)\}$. Des Weiteren gelte:

(1) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0 : \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ist monoton.

(2) $\boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ist beschränkt.

(3) $\boldsymbol{\mathcal{A}} := \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ und der verallgemeinerten Bedingung (M).

Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in H$ eine Lösung $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{e,\mathscr{I}}$ von (11).

Beweis: Es reicht wieder den Fall $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ zu betrachten. Ziel ist es im Folgenden Satz 7.2 auf die verallgemeinerte Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d_e \boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathscr{I}} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}, \\ (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H \end{aligned}$$

anzuwenden, wobei $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathscr{I}} := \boldsymbol{\mathcal{A}}_{(\mathscr{I},\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}})} := \boldsymbol{\mathscr{I}}^* \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{\mathscr{I}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$ im Sinne von Lemma 2.17 zu verstehen ist. Aufgrund der Injektivität von $\boldsymbol{\mathscr{I}}^* : \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$ (cf. Bemerkung 8.2) und gemäß Bemerkung 8.4 (i) ist diese verallgemeinerte Evolutionsgleichung äquivalent zu (11). Genauer gilt mit Lemma 2.17:

(1) $(\boldsymbol{\mathcal{A}}_0)_{\mathscr{I}} := \boldsymbol{\mathscr{I}}^* \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 \boldsymbol{\mathscr{I}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$ ist monoton.

(2) $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\mathscr{I}} := \boldsymbol{\mathcal{B}}_{(\mathscr{I},\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}})} := \boldsymbol{\mathscr{I}}^* \boldsymbol{\mathcal{B}} \boldsymbol{\mathscr{I}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$ ist beschränkt.

(3) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathscr{I}} := (\boldsymbol{\mathcal{A}}_0)_{\mathscr{I}} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\mathscr{I}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$ genügt der verallgemeinerten Bedingung (M).

Nach Satz 7.2 bleibt also für $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathscr{I}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$ noch die Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$ nachzuweisen. Seien also $K \geq 0$ beliebig und $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$, sodass

$$\frac{1}{2} \|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\|_H^2 + \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathscr{I}} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}} \leq K$$

für alle $t \in \overline{I}$. Wegen $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathscr{I}} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}}} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ folgt mit der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ die Existenz einer Konstanten $M := M(K, \boldsymbol{\mathcal{A}}) > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M.$$

Da laut Bemerkung 3.18 (ii) oder 8.2 (iii) die Normäquivalenz $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \sim \|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}}$ gilt, genügt $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathscr{I}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathscr{I}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$ der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{\mathscr{I}}$. Satz 7.2 liefert nun unmittelbar die Behauptung. ■

Folgerung 8.8: Sei (V, H, j) ein Prä-Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I, V)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}} := C^0(\overline{I}, H)$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{e,\mathscr{I}}$ wie in Definition 8.3. Des Weiteren gelte:

(1) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0 : \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ist monoton.

(2) $\boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H) \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ ist beschränkt.

(3) $\boldsymbol{\mathcal{A}} := \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H) \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ und der verallgemeinerten Bedingung (M).

Dann existiert zu beliebigem $\boldsymbol{y}_0 \in H$ eine Lösung $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{e,\mathscr{I}}$ von (11).

Beweis: Nach Bemerkung 3.18 (ii) gilt $\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$. Damit ist $\boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ wieder beschränkt und $\boldsymbol{\mathcal{A}} := \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f}$ und der verallgemeinerten Bedingung (M). Satz 8.7 liefert schließlich die Behauptung. ■

Bemerkung 8.9: (Eindeutigkeit) In Satz 8.7 und Folgerung 8.8 gilt Eindeutigkeit, falls der betrachtete Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ zusätzlich strikt monoton ist. Dies beweist man im Wesentlichen wie in [Růž04, Kapitel 3, Satz 3.66].

Beispiel 8.10: (Instationäres p-Laplace-Problem) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $d \geq 2$, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p < \infty$. Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(I, W_0^{1,p}(\Omega)^*)$ ein eindeutiges $\boldsymbol{y} \in W_e^{1,p,p'}(I, W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)^* + L^2(\Omega)^*)$ mit $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ in $L^2(\Omega)$, sodass

$$-\int_I (\boldsymbol{y}(s), v)_{L^2(\Omega)} \varphi'(s) ds + \int_I \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{y}(s)|^{p-2} \nabla \boldsymbol{y}(s) \cdot \nabla v dx \varphi(s) ds = \int_I \langle \boldsymbol{f}(s), v \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \varphi(s) ds$$

für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$.

Beweis: Für $(V, \|\cdot\|_V) := (W_0^{1,p}(\Omega), \|\nabla \cdot\|_{L^p(\Omega)^d})$ und $(H, \|\cdot\|_H) := (L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ ist (V, H, id) offensichtlich ein Prä-Evolutionstripel und $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I, V^*)$ mit

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle_{L^p(I,V)} := \int_I \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}(s)|^{p-2} \nabla \boldsymbol{v}(s) \cdot \nabla \boldsymbol{w}(s) dx ds \text{ für } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in L^p(I,V)$$

strikt monoton und stetig, genügt also der Bedingung (M). Dies ist beispielsweise in [Růž04, Kapitel 3, Lemmata 3.68 und 3.69] bewiesen. Gemäß Bemerkung 2.14 (i) genügt $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \cap C^0(\overline{I}, H) \to L^{p'}(I, V^*)$ zusätzlich der verallgemeinerten Bedingung (M). Des Weiteren ist $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I, V^*)$ beschränkt und koerziv genügt also gemäß Folgerung 5.12 der Bedingung (K). Alternativ sieht man dies auch leicht mit

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \chi_{[0,t]} \rangle_{L^p(I,V)} = \|\boldsymbol{v} \chi_{[0,t]}\|^p_{L^p(I,V)} \geq 0$$

für alle $t \in \overline{I}$ und $\boldsymbol{v} \in L^p(I,V)$ ein. Insgesamt erfüllt $\boldsymbol{\mathcal{A}} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I, V^*)$ die Voraussetzungen von Satz 8.7 und Bemerkung 8.9. ■

Bemerkung 8.11: (Spielraum aus Prä-Evolutionstripel) Um direkt Satz 6.2 oder Satz 7.2 anwenden zu können, müsste man im obigen Beispiel zusätzlich Evolutionstripel-Struktur sicherstellen. Genauer müsste man fordern, dass $p \geq \frac{2d}{d+2}$. Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(I, W_0^{1,p}(\Omega)^*)$ ein eindeutiges $\boldsymbol{y} \in W_e^{1,p,p'}(I, W_0^{1,p}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)^*)$ mit $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ in $L^2(\Omega)$, sodass

$$-\int_I (\boldsymbol{y}(s), v)_{L^2(\Omega)} \varphi'(s) ds + \int_I \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{y}(s)|^{p-2} \nabla \boldsymbol{y}(s) \cdot \nabla v dx \varphi(s) ds = \int_I \langle \boldsymbol{f}(s), v \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \varphi(s) ds$$

für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt, ergibt sich daraus die distributionelle Identität

$$\partial_t \boldsymbol{y} - \mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{y}|^{p-2} \nabla \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f} \text{ in } \mathcal{D}'(I \times \Omega).$$

Da aber $C_0^\infty(\Omega)$ auch dicht in $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ liegt, und das für alle $1 < p < \infty$, folgt diese distributionelle Identität auch aus der Gleichung in Beispiel 8.10 und damit für alle $1 < p < \infty$. Dadurch verdeutlicht sich der Spielraum, den Prä-Evolutionstripel sichern.

9 Existenzsatz für Operatorfamilien

Ziel dieses Kapitels ist, den Abstraktionsgrad der vorherigen Kapitel zu reduzieren, um einen Existenzsatz zu erhalten, der leicht auf möglichst viele instationäre Probleme angewendet werden kann. Dabei befasst sich dieser Abschnitt vor allem mit der Frage, welche Bedingungen an eine Operatorfamilie $\{A(t)\}_{t\in I}$ hinreichend sind, sodass durch die Vorschrift $(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v})(t) := A(t)(\boldsymbol{v}(t))$ ein Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ definiert ist, der die Voraussetzungen der bewiesenen Existenzsätze erfüllt. Dabei soll nun stets $\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I,V)$ sein. Zunächst befassen wir uns mit hinreichenden Bedingungen für die Wohlgestelltheit eines solchen Operators.

Lemma 9.1: (Verallgemeinerter Nemyckii-Operator) Sei (V,H,j) ein Prä-Evolutionstripel mit reflexivem V, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$ und $\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I,V)$. Des Weiteren sei $\{A(t)\}_{t\in I}$ eine Operatorfamilie, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $A(t) : V \cap_j H \to V^*$ ist für fast alle $t \in I$ demistetig.

(ii) Für jedes $v \in V \cap_j H$ ist $A(\cdot)v : I \to V^*$ Bochner-messbar.

(iii) Es existieren $\mathscr{C} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wachsend und $\alpha \in L^{p'}(I, \mathbb{R}_{\geq 0})$, sodass

$$\|A(t)v\|_{V^*} \leq \mathscr{C}(\|jv\|_H)(\alpha(t) + \|v\|_V^{p-1}).$$

für fast alle $t \in I$ und alle $v \in V \cap_j H$.

Dann ist der durch $(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v})(t) := A(t)(\boldsymbol{v}(t))$ definierte **verallgemeinerte Nemyckii-Operator** $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ wohldefiniert, beschränkt und demistetig.

Beweis:

(i) Wohldefiniertheit und Beschränktheit: Sei nun $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) = L^p(I, V \cap_j H) \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H)$ (cf. Bemerkung 3.18 (ii)). Dann existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I, V \cap_j H)$, das heißt $\boldsymbol{s}_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} s_i^n 1_{E_i^n}(t)$, wobei $s_i^n \in V \cap_j H$ und $E_i^n \in \mathcal{L}^1(I)$ mit $E_i^n \cap E_j^n = \emptyset$ für $i \neq j$, die fast überall punktweise in $V \cap_j H$ gegen $\boldsymbol{v}$ konvergiert. Nach Voraussetzung ist $\boldsymbol{\mathcal{A}}s_i^n = A(\cdot)s_i^n : I \to V^*$ und damit auch

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{s}_n = \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{E_i^n} \boldsymbol{\mathcal{A}} s_i^n + \chi_{I\setminus\bigcup_{i=1}^{k_n} E_i^n} \boldsymbol{\mathcal{A}} 0 : I \to V^*$$

Bochner-messbar und konvergiert aufgrund der Demistetigkeit von $A(t) : V \cap_j H \to V^*$ fast überall schwach gegen $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}$ in V^*. Folgerung 3.7 liefert nun die Bochner-Messbarkeit von $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v} : I \to V^*$. Schließlich folgen Wohldefiniertheit und Beschränktheit von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ mit der Ungleichung

$$\begin{aligned}\left(\int_I \|A(s)(\boldsymbol{v}(s))\|_{V^*}^{p'}\, ds\right)^{\frac{1}{p'}} &\leq \left(\int_I \left(\mathscr{C}(\|j(\boldsymbol{v}(s))\|_H)\left(\alpha(s) + \|\boldsymbol{v}(s)\|_V^{p-1}\right)\right)^{p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \mathscr{C}(\|\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(I,H)})\left(\|\alpha\|_{L^{p'}(I)} + \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}^{p-1}\right)\end{aligned}$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H)$, wobei in der zweiten Ungleichung von der Minkowski-Ungleichung Gebrauch gemacht wurde.

(ii) Demistetigkeit: Sei $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$, sodass

$$\boldsymbol{v}_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{v} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) \hookrightarrow L^p(I, V\cap_j H) \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) \hookrightarrow L^p(I, V\cap_j H)$$

Dann existiert eine Teilfolge $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\Lambda} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H)$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$, sodass

$$\boldsymbol{v}_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{v}(t) \text{ in } V\cap_j H \ (n\in\Lambda)$$

für fast alle $t \in I$. Mit der Demistetigkeit von $A(t) : V \cap_j H \to V^*$ gilt nun

$$(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}_n)(t) = A(t)(\boldsymbol{v}_n(t)) \overset{n\to\infty}{\to} A(t)(\boldsymbol{v}(t)) = (\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v})(t) \text{ in } V^* \ (n\in\Lambda)$$

für fast alle $t \in I$. Folgerung 3.13 zusammen mit der Beschränktheit von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ liefert dann bereits, dass

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \ (n\in\Lambda).$$

Da diese Argumentation für alle Teilfolgen gilt, ist $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ schwacher Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$. Das Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1) liefert nun die schwache Konvergenz der gesamten Folge. ■

Lemma 9.2: (Induzierte Bedingung (K)) Sei (V,H,j) ein Prä-Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I,V)$ und $\boldsymbol{\mathcal{Y}} := C^0(\overline{I},H)$. Sei $\{A(t)\}_{t\in I}$ eine Operatorfamilie, sodass zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 9.1 $c_0 > 0$, $c_1 \in L^{p'}(I)$ und $c_2, c_3 \in L^1(I)$ existieren, sodass

(iv) $\langle A(t)v, v\rangle_V \geq c_0\|v\|_V^p - c_1(t)\|v\|_V - c_2(t)\|jv\|_H^2 - c_3(t)$

für fast alle $t \in I$ und alle $v \in V \cap_j H$. Dann genügt $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K).

Beweis: Die Wohldefiniertheit von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ folgt aus Lemma 9.1 zusammen mit der Einbettung $\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H)$ (cf. Bemerkung 3.18 (ii)). Es reicht zu zeigen, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ genügt. Für $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ betrachtet man dann die Operatorfamilie $\widehat{A}(t) : V \cap_j H \to V^*$ mit $\widehat{A}(t)v := A(t)v - \boldsymbol{f}(t)$ in V^* für alle $v \in V \cap_j H$ und fast alle $t \in I$, welche wieder den Voraussetzungen dieses Lemmas genügt und damit der induzierte Operator $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{A}}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$. Insgesamt folgt dann die Bedingung (K) von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$.

Sei also $K \geq 0$ beliebig. Sei weiter $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$, sodass

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\|_H^2 + \int_0^t \langle A(s)(\boldsymbol{v}(s)), \boldsymbol{v}(s)\rangle_V \, ds \leq K$$

für alle $t \in \overline{I}$. Mit

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle A(s)(\boldsymbol{v}(s)), \boldsymbol{v}(s)\rangle_V \, ds &\geq \int_0^t c_0\|\boldsymbol{v}(s)\|_V^p - c_1(s)\|\boldsymbol{v}(s)\|_V - c_2(s)\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(s)\|_H^2 - c_3(s)ds \\ &\geq \int_0^t \frac{c_0}{2}\|\boldsymbol{v}(s)\|_V^p - k|c_1(s)|^{p'} - |c_2(s)|\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(s)\|_H^2 - c_3(s)ds,\end{aligned}$$

wobei von der ε-Young-Ungleichung mit $k := k(\varepsilon, p) := (p\varepsilon)^{1-p'}(p')^{-1}$ und $\varepsilon := \frac{c_0}{2}$ Gebrauch gemacht wurde, folgt weiter, dass

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\|_H^2 + \frac{c_0}{2}\int_0^t \|\boldsymbol{v}(s)\|_V^p ds \leq K + \|c_3\|_{L^1(I)} + k\|c_1\|_{L^{p'}(I)}^{p'} + \int_0^t |c_2(s)|\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(s)\|_H^2 ds$$

für alle $t \in \overline{I}$. Die Gronwall'sche Ungleichung (cf. Lemma A.20) liefert jetzt

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\|_H^2 \leq (K + \|c_3\|_{L^1(I)} + k\|c_1\|_{L^{p'}(I)}^{p'})\exp(2\|c_2\|_{L^1(I)}) =: K_0$$

für alle $t \in \overline{I}$. Daraus folgt weiter

$$\frac{c_0}{2}\int_0^t \|\boldsymbol{v}(s)\|_V^p ds \leq K + \|c_3\|_{L^1(I)} + k\|c_1\|_{L^{p'}(I)}^{p'} + 2K_0\|c_2\|_{L^1(I)} =: K_1$$

für alle $t \in \overline{I}$, das heißt

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq (2K_1/c_0)^{\frac{1}{p}} + (2K_0)^{\frac{1}{2}} =: M.$$

Damit genügt $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ der Bedingung (K) bezüglich $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$. ■

Lemma 9.3: (Verallgemeinertes Hirano-Lemma) Sei (V, H, j) ein Prä-Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$ und $\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I, V)$. Sei $\{A(t)\}_{t\in I}$ eine Operatorfamilie, sodass die Voraussetzungen von Lemma 9.2 erfüllt sind und zusätzlich $A(t) : V \cap_j H \to V^*$ für fast alle $t \in I$ verallgemeinert pseudomonoton ist. Dann folgt für eine Folge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$ und ein $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$ aus

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}, \\ \boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{j}\boldsymbol{y} \text{ in } L^\infty(I, H)\ (n \to \infty), \\ (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n)(t) &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(t) \text{ in } H \text{ für fast alle } t \in I, \\ \text{und } \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} &\leq 0, \end{aligned}$$

dass

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$.

Beweis: Der folgende Beweis ist eine Verallgemeinerung von [BR16, Lemma 4.2], folgt aber im Wesentlichen der dortigen Argumentation. Man geht in vier Schritten vor:

1. **Informationssammlung:** Sei $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ beliebig, aber fest. Gemäß Lemma 9.1 ist $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H) \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ wohldefiniert und beschränkt. Wegen der Reflexivität von $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ existiert eine Teilfolge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\Lambda} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ und ein $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$, sodass $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\xi}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ $(n \in \Lambda)$ und $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$. Weiter

existiert eine Menge $E \subseteq I$ mit $|E^c| = 0$, sodass

$$(j\boldsymbol{y}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (j\boldsymbol{y})(t) \text{ in } H$$

für alle $t \in E$. Des Weiteren gilt für fast alle $t \in I$, dass

$$\begin{aligned}\langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V &\geq c_0\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p - c_1(t)\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V - c_2(t)\|j(\boldsymbol{y}_n(t))\|_H^2 \\ &\quad - c_3(t) - \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \\ &\geq c_0\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p - c_1(t)\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V - c_2(t)\|j(\boldsymbol{y}_n(t))\|_H^2 \\ &\quad - c_3(t) - \mathscr{C}(\|j(\boldsymbol{y}_n(t))\|_H)(\alpha(t) + \|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^{p-1})\|\boldsymbol{y}(t)\|_V\end{aligned}$$

Mit $\|j\boldsymbol{y}_n\|_{L^\infty(I,H)} \leq K$ für ein $K > 0$ und der ε-Young-Ungleichung für geeignete Konstanten $k_1, k_2 > 0$ folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}\langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V &\geq c_0\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p - k_1|c_1(t)|^{p'} - \frac{c_0}{4}\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p - |c_2(t)|K^2 \\ &\quad - c_3(t) - \mathscr{C}(K)(\alpha(t) + \|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^{p-1})\|\boldsymbol{y}(t)\|_V \\ &\geq c_0\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p - k_1|c_1(t)|^{p'} - \frac{c_0}{4}\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p - |c_2(t)|K^2 \\ &\quad - c_3(t) - k_2\|\boldsymbol{y}(t)\|_V^p - \frac{c_0}{4}\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^{(p-1)p'} \\ &\quad - \mathscr{C}(K)\alpha(t)\|\boldsymbol{y}(t)\|_V\end{aligned}$$

Mit $\mu := -k_1|c_1|^{p'} - |c_2|K^2 - |c_3| - k_2\|\boldsymbol{y}(\cdot)\|_V^p - \mathscr{C}(K)\alpha\|\boldsymbol{y}(\cdot)\|_V \in L^1(I)$ und $(p-1)p' = p$ erhält man dann

$$\langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \geq \frac{c_0}{2}\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p + \mu(t) \qquad (*)_{n,t}$$

für fast alle $t \in I$ und alle $n \in \Lambda$. Definiere nun

$$\begin{aligned}\mathcal{S} := \big\{&t \in E \mid A(t) : V \cap_j H \to V^* \text{ ist verallgemeinert pseudomonoton,} \\ &|\mu(t)| < \infty \text{ und es gilt } (*)_{n,t} \text{ für alle } n \in \Lambda\big\}.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $|\mathcal{S}^c| = 0$.

2. Zwischenziel: Nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass

$$\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \geq 0 \qquad (12)$$

für alle $t \in \mathcal{S}$. Sei dazu $t \in \mathcal{S}$ beliebig aber fixiert und definiere

$$\boldsymbol{\Lambda}_t := \{n \in \Lambda \mid \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V < 0\}.$$

Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass $\boldsymbol{\Lambda}_t$ nicht endlich ist. Sonst würde (12) für dieses fixierte $t \in \mathcal{S}$ bereits gelten und man wäre für dieses bereits fertig. Dann gilt aber

$$\limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\boldsymbol{\Lambda}_t}} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \leq 0.$$

Gleichzeitig gilt mit $(*)_{n,t}$, dass

$$\frac{c_0}{2}\|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p \leq \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V + |\mu(t)| < |\mu(t)| < \infty$$

für alle $n \in \boldsymbol{\Lambda}_t$. Aus Lemma 2.10 folgt dann wegen $(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(t)$ in H weiter, dass

$$\boldsymbol{y}_n(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}(t) \text{ in } V \cap_j H \ (n \in \boldsymbol{\Lambda}_t).$$

Die verallgemeinerte Pseudomonotonie von $A(t) : V \cap_j H \to V^*$ liefert schließlich, dass

$$\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\boldsymbol{\Lambda}_t}} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \geq 0.$$

Da nach Definition $\langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \geq 0$ für alle $n \in \Lambda \setminus \boldsymbol{\Lambda}_t$ ist, gilt insgesamt

$$\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \geq 0$$

für alle $t \in \mathcal{S}$.

3. Wechsel auf Bildraumebene: Jetzt zeigt man wie in der Einleitung dieser Arbeit bereits angedeutet, dass eine Teilfolge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\Lambda_0} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$ mit $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ existiert, sodass

$$\boldsymbol{y}_n(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}(t) \text{ in } V \cap_j H \ (n \in \Lambda_0) \text{ und } \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda_0}} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \leq 0$$

für fast alle $t \in I$. Dadurch ist man in der Lage, sich an der verallgemeinerten Pseudomonotonie der Operatorfamilie zu bedienen.

Wegen $\langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V \geq \mu(t)$ für alle $t \in \mathcal{S}$ und $n \in \Lambda$ ist das verallgemeinerte Lemma von Fatou (cf. Lemma A.16) anwendbar und es folgt weiter, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_I \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle A(s)(\boldsymbol{y}_n(s)), \boldsymbol{y}_n(s) - \boldsymbol{y}(s)\rangle_V ds \\ &\leq \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \int_I \langle A(s)(\boldsymbol{y}_n(s)), \boldsymbol{y}_n(s) - \boldsymbol{y}(s)\rangle_V ds \\ &\leq \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq 0, \end{aligned}$$

das heißt $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = 0$. Setze nun für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in I$

$$h_n(t) := \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V.$$

Dann gilt $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \int_I h_n(s)ds = 0$ und $\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} h_n(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathcal{S}$. Da $s \mapsto s^- := \min\{0, s\}$ stetig und monoton wachsend ist, folgt daraus

$$0 \geq \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} h_n(t)^- \geq \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} h_n(t)^- \geq \min\left\{0, \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} h_n(t)\right\} = 0,$$

das heißt $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} h_n(t)^- = 0$ für alle $t \in \mathcal{S}$. Mit $0 \geq h_n(t)^- \geq \mu(t)$ für alle $t \in \mathcal{S}$ und

$n \in \Lambda$ liefert der Satz von Vitali (cf. Lemma A.17), dass

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \int_I |h_n(s)^-| ds = 0.$$

Mit $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \int_I h_n(s) ds = 0$ und $|h_n| = h_n - 2h_n^-$ folgt daraus

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \int_I |h_n(s)| ds = 0.$$

Das liefert wiederum eine Teilfolge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\Lambda_0} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$ mit $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ und eine Menge $F \subseteq I$ mit $|F^c| = 0$, sodass

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda_0}} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V = 0$$

für alle $t \in F$. Dann gilt erneut

$$\limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda_0}} \frac{c_0}{2} \|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p \leq \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda_0}} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_V + |\mu(t)| = |\mu(t)| < \infty$$

für alle $t \in \mathcal{S} \cap F$ und wieder mit Lemma 2.10, dass

$$\boldsymbol{y}_n(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}(t) \text{ in } V \cap_j H \ (n \in \Lambda_0)$$

für alle $t \in \mathcal{S} \cap F$.

4. Wechsel auf Bochner-Lebesgue-Ebene: Die verallgemeinerte Pseudomonotonie von $A(t) : V \cap_j H \to V^*$ für alle $t \in \mathcal{S} \cap F$ liefert nun, dass

$$\langle A(t)(\boldsymbol{y}(t)), \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{v}(t)\rangle_V \leq \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda_0}} \langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{v}(t)\rangle_V$$

für fast alle $t \in I$. Wie in Schritt 1 zeigt man, dass ein $\nu_{\boldsymbol{v}} \in L^1(I)$ existiert, sodass

$$\langle A(t)(\boldsymbol{y}_n(t)), \boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{v}(t)\rangle_V \geq \frac{c_0}{2} \|\boldsymbol{y}_n(t)\|_V^p + \nu_{\boldsymbol{v}}(t)$$

für fast alle $t \in I$ und alle $n \in \Lambda_0$, sodass erneut das verallgemeinerte Lemma von Fatou (cf. Lemma A.16) angewendet werden kann und damit weiter folgt, dass

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} &= \int_I \langle A(s)(\boldsymbol{y}(s)), \boldsymbol{y}(s) - \boldsymbol{v}(s)\rangle_V ds \\
&\leq \int_I \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda_0}} \langle A(s)(\boldsymbol{y}_n(s)), \boldsymbol{y}_n(s) - \boldsymbol{v}(s)\rangle_V ds \\
&\leq \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda_0}} \int_I \langle A(s)(\boldsymbol{y}_n(s)), \boldsymbol{y}_n(s) - \boldsymbol{v}(s)\rangle_V ds \\
&= \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda_0}} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}
\end{aligned}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}.$$

Daraus ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\end{aligned}$$

für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$. Mit $\boldsymbol{v} := 2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ für beliebiges $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ erhält man zusätzlich

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{w} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{w} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$. Insgesamt erhält man also

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{w} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \lim_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{w} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$$

für alle $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$, das heißt $\boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$. ■

Folgerung 9.4: (Induzierte verallgemeinerte Pseudomonotonie) Sei (V, H, j) ein Prä-Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I, V)$ und $\boldsymbol{\mathcal{Y}} := C^0(\overline{I}, H)$. Sei $\{A(t)\}_{t\in I}$ eine Operatorfamilie, welche die Voraussetzungen von Lemma 9.3 erfüllt. Dann ist $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ verallgemeinert pseudomonoton.

Beweis: Gemäß Lemma 9.1 und $\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$ (cf. Bemerkung 3.18) ist $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ wohldefiniert und beschränkt. Seien $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$, sodass

$$\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \text{ und } \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq 0.$$

Dann liefert die Charakterisierung schwacher Konvergenz in Schnitten gemäß Folgerung 2.9 und in $\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ gemäß Folgerung 3.21 zusammen mit der Einbettung $\boldsymbol{\mathcal{Y}} \hookrightarrow L^\infty(I, H)$ (cf. Lemma 3.10 (ii)), dass

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}, \\ \boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{j}\boldsymbol{y} \text{ in } L^\infty(I, H) \ (n \to \infty) \\ \text{und } (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n)(t) &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(t) \text{ in } H\end{aligned}$$

für alle $t \in \overline{I}$. Aus Lemma 9.3 folgt nun unmittelbar die Behauptung. ■

Satz 9.5: (Existenzsatz für verallgemeinert pseudomonotone Operatorfamilien) Sei (V, H, j) ein Prä-Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I, V)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}} := C^0(\overline{I}, H)$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{e,\mathscr{J}}$ wie in Definition 8.3. Des Weiteren genüge die Operatorfamilie $\{A(t)\}_{t\in I}$ den Voraussetzungen von Lemma 9.3. Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in H$ und $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ eine Lösung $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{e,\mathscr{J}}$ von (11).

Beweis: An dieser Stelle sollen zwei Beweismöglichkeiten vorgestellt werden.

1. Möglichkeit: Gemäß der Lemmata 9.1 und 9.2 sowie Folgerung 9.4 ist der induzierte Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ wohldefiniert, beschränkt, verallgemeinert pseudomonoton und genügt der Bedingung (K). Laut Lemma 2.16 genügt $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ insbesondere der verallgemeinerten Bedingung (M). Satz 8.7 liefert dann unmittelbar die Behauptung.

2. Möglichkeit: Die Existenz der Galerkin-Lösungen kann, wie in der Einleitung bereits angedeutet, im Fall durch Operatorfamilien induzierter Operatoren deutlich leichter als in Satz 6.2 gezeigt werden, was in diesem Fall ausgenutzt werden soll. Dies soll zeigen, dass der technische Aufwand in Satz 6.2 auf die Existenz der Galerkin-Lösungen zurückzuführen ist und sich die restlichen Techniken der Sätze S 6.2, 7.2 und 8.7 auch auf die herkömmliche Beweisführung adaptieren lassen, wie sie in der Literatur am häufigsten zu sehen ist. Es sei dazu ohne Einschränkung (V, H, j) ein Evolutions-Tripel mit separablem und reflexivem V. Für den allgemeinen Fall, in dem (V, H, j) ein Prä-Evolutionstripel mit nur reflexivem V ist, würde man dann anschließend der Argumentation in den Sätzen 7.2 und 8.7 folgen, wobei dann Satz 9.5 die Rolle von Satz 6.2 einnehmen würde. Da dies bereits ausgeführt wurde, sei darauf an dieser Stelle verzichtet und man betrachtet nur den Spezialfall mit einem Evolutionstripel (V, H, j), wobei V separabel und reflexiv ist. Des Weiteren reicht es erneut den Fall $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ zu betrachten, denn sonst geht man zur Operatorfamilie $\{\widehat{A}(t)\}_{t\in I}$, wobei $\widehat{A}(t) : V \to V^*$ durch $\widehat{A}(t)v := A(t)v - \boldsymbol{f}(t)$ definiert ist, über, welche wie man leicht einsieht wieder den Voraussetzungen dieses Satzes genügt.

1. Galerkin-Approximation: Als Galerkin-Basis soll die Folge $(V_n, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Satz 6.2 dienen. Zu $n \in \mathbb{N}$ ist nun ein $\boldsymbol{y}_n \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}$ gesucht, sodass

$$\begin{aligned} \frac{d_{e_{V_n}} \boldsymbol{y}_n}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} \boldsymbol{y}_n &= \boldsymbol{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n}, \\ (\boldsymbol{j}_{V_n} \boldsymbol{y}_n)(0) &= j a_n \text{ in } H_{V_n}. \end{aligned}$$

Dabei ist $H_{V_n} := j(V_n)$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} := L^p(I, V_n)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} := C^0(\overline{I}, H_{V_n})$ und $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} := (\mathrm{id}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}})^* \boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{V_n}$ wie in Bemerkung 6.1. Genauer ist $(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} \boldsymbol{v})(t) = A(t)_{V_n}(\boldsymbol{v}(t))$, wobei $A(t)_{V_n} := (\mathrm{id}_{V_n})^* A(t) : V_n \to V_n^*$ im Sinne von Lemma 2.17 zu verstehen ist.

2. Existenz der Galerkin-Lösungen: Wie in Satz 6.2 (2.1) zeigt man, dass die Existenz der Galerkin-Lösungen äquivalent zur Existenz eines $\boldsymbol{y}_n \in W^{1,p'}(I, V_n)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d_{V_n} \boldsymbol{y}_n}{dt}(t) &= -e_{V_n}^{-1} A(t)_{V_n}(\boldsymbol{y}_n(t)) \text{ in } V_n \text{ für fast alle } t \in I, \\ \{\boldsymbol{y}_n\}_{V_n}(0) &= a_n \text{ in } V_n \end{aligned}$$

ist. Definiere nun

$$\boldsymbol{f}_n : I \times V_n \to V_n \text{ mit } \boldsymbol{f}_n(t, v) := -e_{V_n}^{-1} A(t)_{V_n} v \text{ für fast alle } t \in I \text{ und alle } v \in V_n.$$

Da $A(t) : V \to V^*$ für fast alle $t \in I$ pseudomonoton und beschränkt, also demistetig, ist und $V_n \hookrightarrow\hookrightarrow V_n$, ist $A(t)_{V_n} : V_n \to V_n^*$ für fast alle $t \in I$ stetig. Insbesondere ist $A(\cdot)_{V_n} v : I \to V_n^*$ für alle $v \in V_n$ Bochner-messbar, sodass schließlich $\boldsymbol{f}_n : I \times V_n \to V_n$ eine Caratheodory-Funktion im Sinne von Satz A.18 (i) ist. Da $\boldsymbol{f}_n : I \times V_n \to V_n$ aufgrund der Wachstumsbedingung an $A(t) : V \to V^*$ (cf. Lemma 9.1 (iii)) zusätzlich die gewünschte lokale Majorantenbedingung in Satz A.18 (ii) erfüllt, liefert dieser ein

maximales $0 < T_n \leq T$ und ein absolutstetiges $\boldsymbol{y}_n : [0, T_n) \to V_n$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d_{V_n}\boldsymbol{y}_n}{dt}(t) &= \boldsymbol{f}_n(t, \boldsymbol{y}_n(t)) = -e_{V_n}^{-1} A(t)_{V_n}(\boldsymbol{y}_n(t)) \text{ in } V_n, \\ \{\boldsymbol{y}_n\}_{V_n}(0) &= a_n \text{ in } V_n. \end{aligned}$$

für fast alle $t \in (0, T_n)$. Angenommen es sei $T_n < T$. Dann gilt auch

$$e_{V_n} \frac{d\boldsymbol{y}_n}{dt}(s) + A(s)_{V_n}(\boldsymbol{y}_n(s)) = 0 \text{ in } V_n^* \text{ für fast alle } s \in (0, T_n)\,.$$

Testen mit $\boldsymbol{y}_n(s) \in V_n$ für $s \in (0, T_n)$ liefert nach Integration bezüglich $s \in (0, t)$ mit $t \leq T_n$ unter Verwendung der Identitäten $\langle e_{V_n} v, \tilde{v}\rangle_{V_n} = \langle ev, \tilde{v}\rangle_V$ und $\langle A(t)_{V_n} v, \tilde{v}\rangle_{V_n} = \langle A(t)v, \tilde{v}\rangle_V$ für alle $v, \tilde{v} \in V_n$ sowie der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Satz 5.5 (iv)), dass

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n)(t)\|_H^2 + \int_0^t \langle A(s)(\boldsymbol{y}_n(s)), \boldsymbol{y}_n(s)\rangle_V ds \leq \frac{1}{2}\|ja_n\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2$$

Wie in Lemma 9.2 folgt die Existenz eines von $T_n > 0$ unabhängigen $K > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{y}_n\|_{L^p((0,T_n),V)\cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty((0,T_n),H)} \leq K.$$

Jetzt kann man Satz A.18 erneut anwenden und erhält eine Fortsetzung von $\boldsymbol{y}_n : [0, T_n) \to V_n$ auf $[0, T_n + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$, im Widerspruch zur Maximalität von $T_n > 0$. Das heißt es muss $T_n = T$ gelten und man erhält schließlich die globale Existenz der Galerkin-Lösungen.

3. Grenzübergang: Testen mit $\boldsymbol{y}_n \chi_{[0,t]} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}$, wobei $t \in \overline{I}$ beliebig ist, zusammen mit der Bedingung (K), die auch von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ erfüllt ist (cf. Lemma 9.2), liefert nun wieder von $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstanten $M, M' > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \leq M \text{ und } \|\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}^*} \leq M'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren nach Übergang zu einer Teilfolge wieder $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I, H)$ und $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$, sodass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}, \\ \boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{j}\boldsymbol{y} \text{ in } L^\infty(I, H) \\ \text{und } \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\xi} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*. \end{aligned}$$

Daraus folgert man analog zu Satz 6.2 (3.2), dass $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*, \\ (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H. \end{aligned}$$

und wie in Satz 6.2 (3.3), dass $\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}$. Analog zu Satz 6.2 (3.4) sieht man auch ein, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}.$$

Wegen $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\xi}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} &\leq \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \limsup_{n\to\infty} [-\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}] \\ &= \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \lim_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \leq 0.\end{aligned}$$

Das verallgemeinerte Hirano-Lemma (cf. Lemma 9.3) oder die verallgemeinerte Pseudomonotonie von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ gemäß Folgerung 9.4 liefert nun direkt, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{d_e \boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{0} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^*, \\ (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H.\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz 9.5 vollständig. ■

Lemma 9.6: (Eindeutigkeit) Unter den Voraussetzungen von Satz 9.5 mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass ein $\mu \in L^1(I)$ existiert, sodass

$$\langle A(t)v - A(t)w, v - w\rangle_V \geq -\mu(t)\|jv - jw\|_H^2$$

für alle $v, w \in V \cap_j H$ und fast alle $t \in I$, ist die existierende Lösung eindeutig.

Beweis: Seien $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{e_{\mathscr{J}}}$ Lösungen von

$$\frac{d_{e_{\mathscr{J}}} \boldsymbol{y}_i}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{f} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \text{ und } (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_i)(0) = \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H$$

für $i = 1, 2$. Durch Testen der Differenz der Operatorgleichungen mit $(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)\chi_{[0,t]} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ für beliebiges $t \in \overline{I}$ folgt mit der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Satz 5.5 (iv)) und $(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_1)(0) = (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_2)(0)$ in H, dass

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^t \left\langle \frac{d_e}{dt}(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)(s), (\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)(s) \right\rangle_{V \cap_j H} + \langle A(s)(\boldsymbol{y}_1(s)) - A(s)(\boldsymbol{y}_2(s)), \boldsymbol{y}_1(s) - \boldsymbol{y}_2(s)\rangle_V ds \\ &\geq \frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_1)(t) - (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_2)(t)\|_H^2 - \int_0^t |\mu(s)|\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_1)(s) - (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_2)(s)\|_H^2 ds\end{aligned}$$

für alle $t \in \overline{I}$. Die Gronwall'sche Ungleichung (cf. Lemma A.20) liefert nun, dass

$$\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_1)(t) - (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_2)(t)\|_H^2 \leq 0$$

für alle $t \in \overline{I}$. Das heißt $\boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{j}\boldsymbol{y}_2$ in $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ und mit der Injektivität von $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{\mathcal{W}}_{e_{\mathscr{J}}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} \to \boldsymbol{\mathcal{Y}}$, dass $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2$ in $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{e_{\mathscr{J}}}$. ■

10 Existenzsatz mit schlechter Ableitung

Dieser Abschnitt widmet sich der Frage, welche Existenzaussagen noch möglich sind, wenn die Zeitableitung der Lösung in einem so großen Raum liegt, dass sie die verallgemeinerte partielle Integrationsformel nicht mehr erfüllt. In diesem Fall verliert sich der Zusammenhang zur verallgemeinerten Bedingung (M) und man muss auf alternative weniger allgemeine Stetigkeitseigenschaften zurückgreifen. Außerdem muss eine Lösung nicht mehr in $C^0(\overline{I}, H)$ liegen, weshalb sich die Frage der Wohldefiniertheit der Anfangswertbedingung stellt. Diese ist gesichert, da wie sich herausstellt eine $L^\infty(I,H)$-Lösung mit schlechter Ableitung zumindest in $C^0_\omega(\overline{I}, H)$ liegt.

Satz 10.1: (Schwache Auswahlfunktion und verallgemeinerte partielle Integrationsformel) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\mathcal{Y}_\omega := C^0_\omega(\overline{I}, H)$, $\mathcal{W} := W_e^{1,p,q'}(I, V, V^*)$ und $\mathcal{W}' := W_e^{1,q,p'}(I, V, V^*)$. Dann gilt:

(i) Der Operator $\boldsymbol{j} : \mathcal{W} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) \to \mathcal{Y}_\omega$ ist wohldefiniert und injektiv.

(ii) Es gilt die **schwache verallgemeinerte partielle Integrationsformel**

$$\left\langle \frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{w}\chi_{[t',t]} \right\rangle_{L^q(I,V)} = [((\boldsymbol{jv})(s), (\boldsymbol{jw})(s))_H]_{s=t'}^{s=t} - \left\langle \frac{d_e \boldsymbol{w}}{dt}, \boldsymbol{v}\chi_{[t',t]} \right\rangle_{L^p(I,V)}$$

für alle $t, t' \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{W} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H)$ und $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}'$. Dabei ist wieder die Punktauswertung im Sinne des stetigen Repräsentanten $\boldsymbol{jw} \in C^0(\overline{I}, H)$ (cf. Satz 5.5 (iii)) beziehungsweise des demistetigen Repräsentanten $\boldsymbol{jv} \in \mathcal{Y}_\omega$ zu verstehen.

Beweis:

ad (i) Der Operator $\boldsymbol{e} : \mathcal{W} \to C^0(\overline{I}, V^*)$ ist gemäß der Sätze 4.8 und 3.14 eine Einbettung und nach Lemma 3.19 und Bemerkung 2.5 (ii) gilt die Mengengleichheit

$$\mathcal{Y}_\omega = L^\infty(I,H) \cap_{\boldsymbol{j^*R}} C^0_\omega(\overline{I}, V^*) = (\boldsymbol{j^*R})^{-1}(C^0_\omega(\overline{I}, V^*) \cap_{(\boldsymbol{j^*R})^{-1}} L^\infty(I,H)),$$

wobei $\boldsymbol{R}$ der durch den Riesz-Isomorphismus $R : H \to H^*$ linear-induzierte Operator ist. Damit ist der Operator $\boldsymbol{j} = (\boldsymbol{j^*R})^{-1}\boldsymbol{e} : \mathcal{W} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) \to \mathcal{Y}_\omega$ wohldefiniert und injektiv.

ad (ii) Zu $\boldsymbol{v} \in \mathcal{W} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H)$ und $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}'$ existieren gemäß [GGZ74, Kapitel IV, Lemma 1.12] oder [BF13, Remark II.5.3.] beziehungsweise Satz 5.5 (ii) Folgen $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\boldsymbol{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{I}, V)$, sodass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_n &\overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{w} \text{ in } \mathcal{W}', \\ \boldsymbol{v}_n &\overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{v} \text{ in } \mathcal{W} \hookrightarrow C^0(I, V^*), \\ \boldsymbol{jw}_n &\overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{jw} \text{ in } C^0(\overline{I}, H), \\ \|\boldsymbol{jv}_n\|_{L^\infty(I,H)} &\leq \|\boldsymbol{jv}\|_{L^\infty(I,H)} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Lemma 3.20 (mit $X = H$ und $Y = V^*$) liefert weiter, dass

$$(\boldsymbol{jv}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{jv})(t) \text{ in } H$$

für alle $t \in \overline{I}$. Alle Folgeglieder erfüllen die gewünschte partielle Integrationsformel, sodass im Grenzübergang $(n \to \infty)$ mit den angegebenen Konvergenzen die schwache verallgemeinerte partielle Integrationsformel und damit Punkt (ii) folgt. ■

Definition 10.2: (Schwache Bedingung (K)) Sei (V,H,j) ein Evolutionstripel, $I:=(0,T)$, $0<T<\infty$, $1<p\leq q<\infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}:=L^p(I,V)$ und $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega:=C^0_\omega(\overline{I},H)$. Der Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}}:\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega\to L^{q'}(I,V^*)$ genügt der

(i) schwachen Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f}\in L^{q'}(I,V^*)$, falls für alle $K\geq 0$ eine Konstante $M:=M(K,\boldsymbol{f},\boldsymbol{\mathcal{A}})>0$ existiert, sodass für $\boldsymbol{v}\in L^q(I,V)\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega$ aus

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\|_H^2+\langle\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}\rangle_{L^q(I,V)}\leq K$$

für alle $t\in\overline{I}$ folgt, dass $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}L^\infty(I,H)}\leq M$.

(ii) schwachen Bedingung (K), falls er für alle $\boldsymbol{f}\in L^{q'}(I,V^*)$ der Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f}$ genügt.

Satz 10.3: (Existenzsatz bei schwacher Anfangswertbedingung) Sei (V,H,j) ein Evolutionstripel, V separabel und reflexiv, $I:=(0,T)$, $0<T<\infty$, $1<p\leq q<\infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}:=L^p(I,V)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega:=C^0_\omega(\overline{I},H)$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}}:=W_e^{1,p,q'}(I,V,V^*)$. Des Weiteren sei $\boldsymbol{\mathcal{A}}:\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega\subseteq\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}L^\infty(I,H)\to L^{q'}(I,V^*)$ beschränkt, genüge der schwachen Bedingung (K) bezüglich $\boldsymbol{f}\in L^{q'}(I,V^*)$ und für eine Folge $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega$ und ein $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega$ folge aus

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_n&\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup}\boldsymbol{v}\text{ in }\boldsymbol{\mathcal{X}},\\ \boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n&\overset{*}{\rightharpoonup}\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}\text{ in }L^\infty(I,H)\ (n\to\infty)\\ \text{und }(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}_n)(t)&\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup}(\boldsymbol{j}\boldsymbol{v})(t)\text{ in }H\end{aligned}$$

für alle $t\in\overline{I}$, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}_n\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}$ in $L^{q'}(I,V^*)$. Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0\in H$ ein $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}\cap_{\boldsymbol{j}}L^\infty(I,H)$, sodass

$$\begin{aligned}\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt}+\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{f}\text{ in }L^{q'}(I,V^*),\\ (\boldsymbol{j}\boldsymbol{y})(0)&=\boldsymbol{y}_0\text{ in }H.\end{aligned}$$

Beweis: Es reicht wieder den Fall $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ in $L^{q'}(I,V^*)$ zu betrachten.

1. Galerkin-Ansatz: Als Galerkin-Basis soll die Folge $(V_n,ja_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Satz 6.2 dienen. Es seien $H_{V_n}:=j(V_n)$, $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}:=L^p(I,V_n)\cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}}L^q(I,H_{V_n})$ und $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}:=C^0(\overline{I},H_{V_n})$ wie in Bemerkung 6.1. Wegen $\dim V_n<\infty$ gilt $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}\hookrightarrow L^q(I,V_n)\hookrightarrow L^q(I,V)$. Mit $\iota_n:\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}\hookrightarrow L^q(I,V)$ ist dann

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}:=\iota_n^*\boldsymbol{\mathcal{A}}:\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}\cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n}\to\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}^*$$

wohldefiniert und wieder beschränkt. Zu $n\in\mathbb{N}$ ist nun ein $\boldsymbol{y}_n\in\boldsymbol{\mathcal{W}}_{V_n}:=W_{e_{V_n}}^{1,q,q'}(I,V_n,V_n^*)$ gesucht, sodass

$$\begin{aligned}\frac{d_{e_{V_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt}+\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{y}_n&=\boldsymbol{0}\text{ in }\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}^*,\\ (\boldsymbol{j}_{V_n}\boldsymbol{y}_n)(0)&=ja_n\text{ in }H_{V_n}.\end{aligned}$$

2. Existenz der Galerkin-Lösungen: Aus der angegebenen Stetigkeitseigenschaft folgt unmittelbar, dass $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}^*$ der verallgemeinerten Bedingung (M) genügt. Es bleibt also die schwache Bedingung (K) bezüglich $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}^*$ zu prüfen. Seien also $K \geq 0$. Weiter sei $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \subseteq L^q(I,V) \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega$, sodass

$$\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{jv})(t)\|_H^2 + \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} \leq K$$

für alle $t \in \overline{I}$. Wegen $\langle \boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\chi_{[0,t]}\rangle_{L^q(I,V)}$ und der schwachen Bedingung (K) von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) \to L^{q'}(I,V^*)$ folgt die Bedingung (K) von $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{V_n} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n} \cap_{\boldsymbol{j}_{V_n}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{V_n} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_{V_n}^*$. Satz 6.2 liefert sofort die Existenz von Galerkin-Lösungen und zusammen mit der schwachen Bedingung (K) sowie der Beschränktheit von $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega \subseteq \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H) \to L^{q'}(I,V^*)$ von $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstanten $M, M' > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{y}_n\|_{\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H)} \leq M \text{ und } \|\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n\|_{L^{q'}(I,V^*)} \leq M'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Grenzübergang: Nach Übergang zu einer Teilfolge folgt nun die Existenz von Elementen $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H)$ und $\boldsymbol{\xi} \in L^{q'}(I,V^*)$, sodass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \boldsymbol{\mathcal{X}}, \\ \boldsymbol{jy}_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{jy} \text{ in } L^\infty(I,H) \ (n \to \infty) \\ \text{und } \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\xi} \text{ in } L^{q'}(I,V^*). \end{aligned}$$

Sei $v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $v \in V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Testen mit $v\varphi \in L^q(I,V_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, wobei $\varphi \in C_0^\infty(I)$ beliebig ist, liefert nach Anwendung der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Satz 5.5 (iv)), dass

$$\langle e(v)\varphi', \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, v\varphi\rangle_{L^q(I,V)}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Im Grenzübergang $(n \to \infty)$ erhält man wieder, dass $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ mit

$$\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} = -\boldsymbol{\xi} \text{ in } L^{q'}(I,V^*).$$

Genauer ist $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{W}} \cap_{\boldsymbol{j}} L^\infty(I,H)$ und damit $\boldsymbol{jy} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega$ gemäß Satz 10.1 (i) wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, dass $(\boldsymbol{jy}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{jy})(t)$ in H für alle $t \in \overline{I}$. Sei dazu $t \in \overline{I}$ beliebig aber fixiert. Dann existiert eine Teilfolge $(\boldsymbol{y}_n(t))_{n\in\boldsymbol{\Lambda}_t}$ mit $\boldsymbol{\Lambda}_t \subseteq \mathbb{N}$ und ein $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_t} \in H$, sodass

$$(\boldsymbol{jy}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\Lambda}_t} \text{ in } H \ (n \in \boldsymbol{\Lambda}_t).$$

Sei $v \in \bigcup_{n\in\boldsymbol{\Lambda}_t} V_n$ beliebig und $n_{0,t} \in \boldsymbol{\Lambda}_t$, sodass $v \in V_n$ für alle $n \in \boldsymbol{\Lambda}_t$ mit $n \geq n_{0,t}$. Testen mit $v\varphi\chi_{[0,t]} \in L^q(I,V_n)$ für alle $n \in \boldsymbol{\Lambda}_t$ mit $n \geq n_{0,t}$, wobei $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ beliebig ist, liefert

$$\langle e(v)\varphi'\chi_{[0,t]}, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - ((\boldsymbol{jy}_n)(t), jv)_H\varphi(t) + (ja_n, jv)_H\varphi(0) = \langle \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{y}_n, v\varphi\chi_{[0,t]}\rangle_{L^q(I,V)}.$$

für alle $n \in \mathbf{\Lambda}_t$ mit $n \geq n_{0,t}$. Dann erhält man im Grenzübergang $(n \to \infty, n \in \mathbf{\Lambda}_t)$, dass

$$\langle e(v)\varphi' \chi_{[0,t]}, \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - (\boldsymbol{y}_{\mathbf{\Lambda}_t}, jv)_H \varphi(t) + (\boldsymbol{y}_0, jv)_H \varphi(0) = \langle \boldsymbol{\xi}, v\varphi\chi_{[0,t]} \rangle_{L^q(I,V)}.$$

Mit der schwachen verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Satz 10.1 (ii)) folgt

$$((\boldsymbol{jy})(t) - \boldsymbol{y}_{\mathbf{\Lambda}_t}, jv)_H \varphi(t) = ((\boldsymbol{jy})(0) - \boldsymbol{y}_0, jv)_H \varphi(0)$$

für alle $v \in \bigcup_{n \in \mathbf{\Lambda}_t} V_n$ und $\varphi \in C^\infty(\bar{I})$, also wieder $(\boldsymbol{jy})(t) = \boldsymbol{y}_{\mathbf{\Lambda}_t}$ und $(\boldsymbol{jy})(0) = \boldsymbol{y}_0$ in H. Mit dem Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1) folgert man erneut, dass $(\boldsymbol{jy}_n)(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{jy})(t)$ in H für alle $t \in \bar{I}$. Die angegebene Stetigkeitseigenschaft liefert schließlich $\boldsymbol{\mathcal{A}y} = \boldsymbol{\xi}$ in $L^{q'}(I, V^*)$, das heißt

$$\frac{d_e \boldsymbol{y}}{dt} + \boldsymbol{\mathcal{A}y} = \mathbf{0} \text{ in } L^{q'}(I, V^*) \text{ und } (\boldsymbol{jy})(0) = \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H. \qquad \blacksquare$$

Folgerung 10.4: (Existenzsatz für Operatorfamilien mit schwacher Anfangswertbedingung) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, V separabel und reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{X}} := L^p(I, V)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega := C^0_\omega(\bar{I}, H)$ und $\boldsymbol{\mathcal{W}} := W_e^{1,p,q'}(I, V, V^*)$. Des Weiteren sei $\{A(t)\}_{t\in I}$ eine Operatorfamilie, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $A(\cdot)v : I \to V^*$ ist für alle $v \in V$ Bochner-messbar und $A(t) : V \to V^*$ erfüllt für fast alle $t \in I$, dass für eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ aus $jv_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} jv$ in H folgt, dass $A(t)v_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} A(t)v$ in V^*.

(ii) Es existieren $\mathscr{C} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wachsend, $\alpha \in L^{q'}(I, \mathbb{R}_{\geq 0})$, sodass

$$\|A(t)v\|_{V^*} \leq \mathscr{C}(\|jv\|_H)(\alpha(t) + \|v\|_V^{\frac{p}{q'}})$$

für fast alle $t \in I$ und alle $v \in V$.

(iii) Es existieren $c_0 > 0$, $c_1 \in L^{p'}(I)$ und $c_2, c_3 \in L^1(I)$, sodass

$$\langle A(t)v, v\rangle_V \geq c_0\|v\|_V^p - c_1(t)\|v\|_V - c_2(t)\|jv\|_H^2 - c_3(t)$$

für fast alle $t \in I$ und alle $v \in V$.

Dann ist der durch $(\boldsymbol{\mathcal{A}v})(t) := A(t)(\boldsymbol{v}(t))$ induzierte Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_\omega \to L^{q'}(I, V^*)$ wohldefiniert und genügt den Voraussetzungen von Satz 10.3.

Beweis: Wohldefiniertheit und Beschränktheit von $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ folgen wie in Lemma 9.1 aus (i) und (ii). Die Punkte (i) und (iii) implizieren $\|v\|_V \leq C\|jv\|_H$: Andernfalls existieren $v_n \in V$ mit $\|v_n\|_V = n$ und $\|jv_n\|_H \leq n^{-1}$. Für ein festes t, an dem (i), (iii) gelten und die Koeffizienten endlich sind, wäre $(A(t)v_n)_n$ nach (i) schwach konvergent, also beschränkt, im Widerspruch zu (iii) und $p > 1$. Für $\boldsymbol{f} \in L^{q'}(I, V^*)$ ist $g := \|\boldsymbol{f}(\cdot)\|_{V^*} \in L^1(I)$ und es gilt $|\langle \boldsymbol{f}(t), v\rangle_V| \leq \frac{C}{2} g(t)(1 + \|jv\|_H^2)$. Damit ergibt sich die schwache Bedingung (K) wie in Lemma 9.2 aus (iii), der Young-Ungleichung und Gronwall.

Für eine Folge $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Konvergenzen aus Satz 10.3 liefert (i) $A(t)(\boldsymbol{v}_n(t)) \rightharpoonup A(t)(\boldsymbol{v}(t))$ in V^* für fast alle $t \in I$. Die Beschränktheit von $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ und Folgerung 3.13 sichern schließlich $\boldsymbol{\mathcal{A}v}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\mathcal{A}v}$ in $L^{q'}(I, V^*)$. $\blacksquare$

11 Appendix

Allgemeine Topologie:

Lemma A.1: (Teilfolgenargument) Sei (X, τ) ein hausdorffscher, topologischer Raum und für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ existiere ein $x \in X$, welches Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ist. Dann gilt

$$x_n \overset{n\to\infty}{\to} x \text{ bezüglich } \tau.$$

Beweis: Angenommen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ konvergiere nicht gegen $x \in X$ bezüglich τ. Dann existiert eine Teilfolge $(x_n)_{n\in\Lambda} \subseteq X$ mit $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ und eine offene Umgebung $A \in \tau$ von x, sodass $x_n \notin A$ für alle $n \in \Lambda$. Dies ist ein Widerspruch, da x Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\Lambda} \subseteq X$ ist, also $x_n \in A$ für unendlich viele $n \in \Lambda$. ■

Satz A.2: (Tychonoff) Ist $((X_i, \tau_i))_{i\in I}$ eine Familie kompakter, topologischer Räume, dann ist der Produktraum $(\prod_{i\in I} X_i, \tau)$ mit der kanonischen Produkttopologie τ kompakt.

Beweis: Siehe [Yos80, 0. Preliminaries, 2., Tychonoff's Theorem]. ■

Lemma A.3: (Endliches Durchschnittsprinzip) Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann kompakt bezüglich τ, wenn jedes zentrierte System von in X bezüglich τ abgeschlossenen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Dabei heißt ein System $\mathcal{K}$ zentriert, falls für beliebige $M_i \in \mathcal{K}$, wobei $i = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i \neq \emptyset.$$

Beweis: Siehe [Růž04, Anhang: Lemma 1.3]. ■

Satz A.4: (Hahn-Banach) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum, $M \subseteq X$ ein linearer Teilraum und $f \in M^*$ linear und stetig. Dann existiert ein $\overline{f} \in X^*$, sodass $\overline{f} = f$ auf M und $\|\overline{f}\|_{X^*} \leq \|f\|_{M^*}$.

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter IV, 6., Theorem 2]. ■

Schwache und *-schwache Topologie:

Satz A.5: (Kakutani) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Dann ist $B_1^X(0)$ genau dann kompakt bezüglich $\tau(X, X^*)$, wenn X reflexiv ist.

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter V, 3., Theorem 2]. ■

Satz A.6: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein separabler Banachraum und $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine *-schwach konvergente Teilfolge.

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter V, 1., Theorem 10]. ■

Satz A.7: (Eberlein-Šmuljan, 1940) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter V, 2., Theorem 1]. ■

Orthogonalität in Banachräumen und adjungierte Operatoren:

Definition A.8: ((Prä-)Orthogonalkomplement) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Das **Orthogonalkomplement** einer Menge $M \subseteq X$ ist die Menge

$$M^\perp := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle_X = 0 \text{ für alle } x \in M\} \subseteq X^*.$$

Das **Präorthogonalkomplement** einer Menge $N \subseteq X^*$ ist die Menge

$$N^\perp := \{x \in X \mid \langle x^*, x\rangle_X = 0 \text{ für alle } x^* \in N\} \subseteq X.$$

Satz A.9: (vom abgeschlossenen Graphen) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist der **Graph** von A, definiert durch

$$G(A) := \{(x, Ax)^T \mid x \in X\}$$

abgeschlossen im Banachraum $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$, wobei $\|(x, y)^T\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter II, 6., Proposition 2]. ■

Definition A.10: (Adjungierter Operator) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist der zu A **adjungierte Operator** $A^* : Y^* \to X^*$ definiert durch

$$\langle A^*y^*, x\rangle_X := \langle y^*, Ax\rangle_Y$$

für alle $x \in X$ und $y^* \in Y^*$. Man sieht unmittelbar, dass $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

Satz A.11: (Eigenschaften adjungierter Operatoren) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume. Dann gilt:

(i) Der Operator $(A \mapsto A^*) : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ ist eine Isometrie.

(ii) $(BA)^* = A^*B^*$ für alle $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter VII, 2., Theorem 2' und 3]. ■

Satz A.12: Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt:

(i) $R(A)^\perp = N(A^*)$

(ii) $R(A^*)^\perp = N(A)$

(iii) $\overline{R(A)}^{\|\cdot\|_Y} = N(A^*)^\perp$

(iv) $\overline{R(A^*)}^{\tau(X^*,X)} = N(A)^\perp$

Beweis: Siehe [Ka14, Theorem 9.3]. ■

Satz A.13: (vom abgeschlossenen Bild) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $R(A)$ ist abgeschlossen in Y.

(ii) $R(A^*)$ ist abgeschlossen in X^*.

(iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$.

(iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$.

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter VII. Dual Operators, 5. The Closed Range Theorem]. ■

Hilberträume:

Lemma A.14: (Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren) Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum und $M \subseteq H$ abzählbar. Dann existiert ein Orthonormalsystem $(\varphi_j)_{j\in J} \subseteq H$ mit endlichem oder abzählbarem J, sodass $\langle\{\varphi_j \mid j \in J\}\rangle = \langle M\rangle$.

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter III, 5. E. Schmidt's Orthogonalization]. ■

Lemma A.15: (Verallgemeinerte Fourierreihe) Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum, $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq H$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H und $H_n := \langle\{\varphi_j \mid j = 1, ..., n\}\rangle$. Dann gilt für die Projektionsoperatoren $P_n : H \to H_n$ mit

$$P_n(h) := \sum_{j=1}^{n} (h, \varphi_j)_H \varphi_j,$$

dass $P_n(h) \overset{n\to\infty}{\to} h$ in H und $\|P_n(h)\|_H \leq \|h\|_H$

Beweis: Siehe [Yos80, Chapter III, 4., Theorem 2 und Corollary 1]. ■

Lebesgue'sche Integrationstheorie:

Lemma A.16: (Verallgemeinertes Lemma von Fatou) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$, sodass $\liminf_{n\to\infty} \int_I f_n(s)ds < \infty$ und $f_n \geq g_n$ fast überall für $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$ gleichgradig-integrierbar. Dann ist $\liminf_{n\to\infty} f_n \in L^1(I)$ und es gilt

$$\int_I \liminf_{n\to\infty} f_n(s)ds \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n(s)ds.$$

Beweis: Siehe [Ro05, Chapter 1, Theorem 1.18]. ■

Lemma A.17: (Konvergenzsatz von Vitali) Sei $1 \leq p < \infty$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I)$ konvergiere punktweise fast überall gegen $f : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ in $L^p(I)$ genau dann, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I)$ p-gleichgradig integrierbar ist, das heißt zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $A \in \mathcal{L}^1(I)$ mit $|A| < \delta$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |f_n(s)|^p ds < \varepsilon.$$

Beweis: Siehe [DS58]. ■

Sonstiges:

Satz A.18: (Existenzsatz von Caratheodory) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein endlichdimensionaler Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $\boldsymbol{f} : I \times X \to X$ genüge den folgenden Bedingungen:

(i) $\boldsymbol{f}(\cdot, x) : I \to X$ ist für alle $x \in X$ Bochner-messbar und $\boldsymbol{f}(t, \cdot) : X \to X$ ist für fast alle $t \in I$ stetig.

(ii) Zu jedem kompakten $K \subseteq X$ existiert ein $m_K \in L^1(I, \mathbb{R}_{\geq 0})$, sodass $\|\boldsymbol{f}(t,x)\|_X \leq m_K(t)$ für alle $x \in K$ und fast alle $t \in I$.

Dann existiert zu beliebigem $\boldsymbol{x}_0 \in X$ ein $0 < \tau \leq T$ und ein absolutstetiges $\boldsymbol{x} : [0, \tau) \to X$, sodass

$$\boldsymbol{x}\prime(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)) \text{ in } X \text{ für fast alle } t \in [0,\tau) \text{ und } \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \text{ in } X.$$

Beweis: In [Ha80, Theorem 5.1] ist ein Beweis für $X = \mathbb{R}^d$ zu finden. Da der Raum X endlichdimensional ist, ist er isomorph zu $\mathbb{R}^{\dim X}$, sodass sich das Ergebnis überträgt. ■

Lemma A.19: (Stauchungsoperator) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für beliebiges $r > 0$ der Operator $\mathbf{f}_r : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{f}_r(v) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \mathbf{f}(v) \leq r \\ \frac{r}{\mathbf{f}(v)} & \text{, falls } \mathbf{f}(v) > r \end{cases}$$

wieder stetig.

Beweis: Zunächst ist $\mathbf{f}_r$ wohldefiniert, da $\mathbf{f}_r(x) = 1$ für $\mathbf{f}(x) \leq r$. Es reicht Folgenstetigkeit zu prüfen: Es gelte $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in X. Man unterscheide die folgenden Fälle:

Fall 1: $x \in \{\mathbf{f} > r\} \cup \{\mathbf{f} < r\}$: Für $x \in \{\mathbf{f} > r\}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in \{\mathbf{f} > r\}$ für alle $n \geq n_0$, da $\{\mathbf{f} > r\}$ offen ist. Da $\mathbf{f}_r$ auf $\{\mathbf{f} > r\}$ stetig ist, folgt $\mathbf{f}_r(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} \mathbf{f}_r(x)$. Für $x \in \{\mathbf{f} < r\}$ argumentiert man analog.

Fall 2: $x \in \{\mathbf{f} = r\}$: Ohne Einschränkung sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{\mathbf{f} > r\}$, denn für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{\mathbf{f} \leq r\}$ gilt bereits $\mathbf{f}_r(x_n) = 1 = \mathbf{f}_r(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\frac{1}{\mathbf{f}}$ auf $\{\mathbf{f} \geq r\}$ stetig ist, gilt schließlich

$$|\mathbf{f}_r(x_n) - \mathbf{f}_r(x)| = r \left| \frac{1}{\mathbf{f}(x_n)} - \frac{1}{\mathbf{f}(x)} \right| \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$ ■

Lemma A.20: (Gronwall'sche Ungleichung) Sei $0 < T < \infty$, $I := (0,T)$, $y \in L^\infty(I)$, $g \in L^1(I, \mathbb{R}_{\geq 0})$ und $y_0 \in \mathbb{R}$, sodass

$$y(t) \leq y_0 + \int_0^t g(s)y(s)ds$$

für fast alle $t \in I$. Dann gilt $y(t) \leq y_0 \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right)$ für fast alle $t \in I$.

Beweis: Siehe [BF13, Chapter II, Theorem II.4.10]. ■

Literaturverzeichnis

[BH72] Felix E. Browder, Peter Hess - Nonlinear Mappings of Monotone Type in Banach Spaces - Journal of Functional Analysis 11, 251-294 (1972)

[BF13] F. Boyer, P. Fabrie, Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models, Springer Verlag, 2013.

[BR16] E. Bäumle, M. Růžička, Note on the existence theory for evolution equations with pseudo-monotone operators, Ricerche di Matematica 66, 35–50 (2017; online 2016).

[BS88] C. Bennett, R. Sharpley, Interpolation of Operators, Academic Press, 1988.

[BT38] S. Bochner, A.E. Taylor, Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions, Annals of Math, (2) 39 (1938), 913-944.

[DS58] N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience, New York, 1958.

[DU77] J. Diestel, J. J. Uhl, Vector Measures, Mathematical Surveys and Monographs 15, American Mathematical Soc., 1977.

[GGZ74] H.Gajewski, K.Gröger, K.Zacharias, Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Akademie-Verlag Berlin, 1974.

[Ha80] J. K. Hale: Ordinary Differential Equations (2nd ed.), Malabar, Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.

[Ka14] W. Kaballo, Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.

[Ro05] T. Roubíček, Nonlinear partial differential equations with applications, International Series of Numerical Mathematics, vol. 153. Birkhaeuser, Basel, 2005.

[Růž04] M. Růžička. Nichtlineare Funktionalanalysis: Eine Einführung. Springer Verlag, Berlin, 2004.

[Růž16] M. Růžička, Skript zur Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Wintersemester 2016/17.

[Yos80] K. Yosida. Functional analysis, Band 123 aus Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Zei90A] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Zei90B] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications. II/B: Nonlinear monotone operators, Springer-Verlag, New York, 1990.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel verwendet habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe. Darüber hinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, bereits für eine andere Prüfung angefertigt wurde.

Freiburg, den 18. Mai 2019