

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Abteilung für Angewandte Mathematik

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
„Bachelor of Science“

Vorgelegt von

Alex Kaltenbach

Betreut von

Prof. Dr. Michael Růžička

15. März 2017

(korrigierte Version)

Inhaltsverzeichnis

Notation **1**

1 Einleitung **3**

2 Mathematische Grundlagen **5**

▷ Stetigkeit **5**

▷ Monotone Operatoren **6**

▷ Funktionen mit Werten in Banachräumen **10**

3 Operatoren auf Bochner-Lebesgue-Räumen **12**

4 Distributionelle Zeitableitung **16**

5 Evolutionstripel **20**

6 Nichtlineare Evolutionsgleichungen **22**

▷ Allgemeiner Galerkin-Ansatz **22**

▷ Existenzsatz mit separablem V **24**

▷ Existenzsatz mit nichtseparablem V **32**

Appendix **37**

Erklärung **39**

Literatur **40**

Notation

Diese Arbeit orientiert sich wesentlich an folgender Notation:

$v, u, x, y, z, ...$	Elemente aus Banachräumen,
$x^*, y^*, z^*, ...$	lineare Funktionale,
$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ...$	Banachraumwertige Funktionen,
φ	Funktion aus $C_0^\infty(I)$ oder $C^\infty(\overline{I})$,
$A, B, C, ...$	Operatoren zwischen allgemeinen Banachräumen,
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, ...$	Operatoren zwischen Bochner-Lebesgue-Räumen,
$X, Y, Z, ...$	allgemeine Banachräume,
$J : X \to Y$	allgemeine Einbettung, das heißt linear, stetig und injektiv,
A_J	Einschränkung von $A : X \to X^*$ bezüglich Einbettung $J : Y \to X$, auch A_U, falls $U \subseteq X$ bezüglich Id_U in X einbettet, siehe Lemma 2.9
$X^*, Y^*, Z^*, ...$	Dualräume,
V	mindestens reflexiver Banachraum,
H	Hilbertraum,
j	dichte Einbettung $j : V \to H$,
(V, H, j)	Evolutionstripel, siehe Definition 5.1,
e	kanonische Einbettung zu Evolutionstripel (V, H, j), siehe Lemma 5.2,
e_U	Einschränkung der kanonischen Einbettung auf Unterraum $U \subseteq V$, siehe Bemerkung 6.3 (ii),
p, q	Integrabilitätsexponenten $p, q \in [1, \infty]$,
p'	zu $p \in [1, \infty]$ konjugierter Exponent $p' \in [1, \infty]$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,
$C^\infty(\overline{I})$	Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen,
$C_0^\infty(I)$	Raum der Testfunktionen mit kompakt in I enthaltenem Träger,
$C^0(\overline{I}, X)$	Raum der auf $\overline{I}$ stetigen Funktionen mit Werten in X,
$C^1(\overline{I}, X)$	Raum der auf $\overline{I}$ stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X,
$\mathcal{S}(I, X)$	Menge der einfachen Funktionen auf I mit Werten in X,
$L^p(I, X)$	Bochner-Lebesgue-Raum, siehe Definition 2.12,
$W_J^{1,p,q}(I, X, Y)$	Bochner-Sobolev-Raum bezüglich Einbettung J, siehe Definition 4.3,
$\mathbf{X}$	Bochner-Lebesgue-Raum bei Evolutionstripel-Struktur, siehe Bemerkung 5.3,
$\mathbf{X}_U$	Funktionen aus $\mathbf{X}$ mit Werten in Banachraum $(U, \|\cdot\|_V)$, siehe Bemerkung 6.3 (iii),
$\mathbf{W}$	Bochner-Sobolev-Raum bei Evolutionstripel-Struktur, siehe Bemerkung 5.3,
$\mathbf{W}_U$	Bochner-Sobolev-Raum bezüglich Einbettung e_U, siehe Bemerkung 6.3 (iii),

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Dualitätsprodukt auf $X^* \times X$,
$(\cdot, \cdot)_H$	Skalarprodukt auf Hilbertraum H,
$\| \cdot \|_X$	Norm auf Banachraum X,
$\|\|\| \cdot \|\|\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$	Operatornorm auf Raum der linearen, stetigen Operatoren $\mathcal{L}(X, Y)$,
$\lvert \cdot \rvert$	Absolutbetrag,
$\to$	starke Konvergenz,
$\rightharpoonup$	schwache Konvergenz,
$\hookrightarrow$	$X \hookrightarrow Y$ entspricht X bettet ein in Y,
$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \frac{d_J \boldsymbol{x}}{dt}$	distributionelle Zeitableitung (bezüglich Einbettung J), siehe Definition 4.1,
$d_t \boldsymbol{v}$	verallgemeinerte Zeitableitung, siehe Bemerkung 5.5,
$\boldsymbol{x'}$	klassische Zeitableitung,
$\overline{A}^{\tau}$	Abschluss bezüglich Topologie τ, $\tau = \| \cdot \|_X$ im Falle einer Normtopologie,
$\tau(X, X^*)$	schwache Topologie auf Banachraum X,
$\langle M \rangle$	lineare Hülle von M,
$\mathrm{conv} M$	konvexe Hülle von M,
$R(A)$	Bild der Abbildung A,
B_r^X	abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius r im Raum X,
$\mathcal{L}(I)$	Lebesgue'sche Sigma-Algebra,

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit diskutiert nichtlineare Evolutionsgleichungen, ein Spezialfall einer Operatordifferentialgleichung, der aufgrund seiner besonderen Gestalt Existenzaussagen mit verhältnismäßig schwachen Voraussetzungen an die zugrunde liegenden Räume und Operatoren ermöglicht.

Genauer interessieren wir uns für eine Operatordifferentialgleichung mit Anfangswertbedingung der Form:

$$\begin{aligned} d_t \boldsymbol{y} + \mathbf{A}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{f} \text{ in } L^{p'}(I, V^*) \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Dabei ist V ein Banachraum, der dicht in einen Hilbertraum H einbettet, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $\boldsymbol{y}_0 \in H$, $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(I, V^*)$ und $\mathbf{A} : L^p(I, V) \to L^{p'}(I, V^*)$. Außerdem bezeichne $d_t \boldsymbol{y} \in L^{p'}(I, V^*)$ die verallgemeinerte Zeitableitung, wie sie beispielsweise in [SND16, Definition 4.22] definiert ist. Die Wohldefiniertheit der Punktauswertung wird noch geklärt.

Diese Arbeit beschränkt sich lediglich auf das abstrakte Modell einer nichtlinearen Evolutionsgleichung. Trotzdem sei auf den Zusammenhang zu parabolischen Differentialgleichungen hingewiesen, wie er beispielsweise in [SND16, Kapitel 7] und [Růž04, Kapitel 3] dargestellt ist.

Es besteht die Absicht, einen möglichst allgemeinen Existenzsatz für Probleme des beschriebenen Modells $(*)$ zu formulieren und zu beweisen. Als Grundlage soll ein Galerkin-Ansatz dienen.

Für den Fall eines beschränkten, pseudomonotonen und koerziven Operators $\mathbf{A}$, der durch einen Operator $A : V \to V^*$ induziert ist, also von der Form

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{v})(t) = A\boldsymbol{v}(t) \text{ in } V^* \text{ für fast alle } t \in I \text{ und } \boldsymbol{v} \in L^p(I, V)$$

ist in [Růž16, Kapitel 3, Satz 2.50] ein Existenzbeweis mit Galerkin-Ansatz zu finden. Die Existenz der Galerkin-Lösungen folgt dort mit dem Satz von Peano (cf. [Růž04, Kapitel 1, Satz 2.55]). In [Em04, Kapitel 8, Satz 8.4.2] werden koerzive Operatoren $\mathbf{A}$ betrachtet, die sich aus einem monotonen, hemistetigen und einem stark stetigen Anteil zusammensetzen und durch Operator-Familien $\{A(t)\}_{t \in I} : V \to V^*$ induziert sind, also von der Form

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{v})(t) = A(t)\boldsymbol{v}(t) \text{ in } V^* \text{ für fast alle } t \in I \text{ und } \boldsymbol{v} \in L^p(I, V).$$

Aufgrund fehlender Stetigkeit in der Zeit ist hier für die Existenz der Galerkin-Lösungen der Satz von Caratheodory notwendig (cf. [Em04, Satz A.2.6]). [GGZ74, Kap. VI, Satz 1.1] geht noch einen Schritt weiter und fordert für den Operator $\mathbf{A}$ lediglich, dass er ein monotoner, radialstetiger und koerziver Volterra-Operator ist, was dort durch

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \text{ in } V \text{ auf } [0, t], t \in \overline{I} \Rightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\boldsymbol{w} \text{ in } V^* \text{ auf } [0, t] \tag{$**$}$$

definiert ist. Für die Existenz der Galerkinlösungen dient hier eine Verallgemeinerung des Satzes von Caratheodory [GGZ74, Kap. VI, Lemma 1.3].

Mit schwindenden strukturellen Voraussetzungen an den Operator $\mathbf{A}$ erschwert sich vor allem, die Existenz von Galerkin-Lösungen zu sichern. Jeder der beschriebenen Existenzbeweise verwendet für die Existenz der Galerkin-Lösungen, wenn auch implizit, dasselbe Vorgehen aus der Theorie

gewöhnlicher Differentialgleichungen. Man bedient sich des üblichen Fixpunktarguments, das auf einer zur Operatordifferentialgleichung äquivalenten Integraldarstellung, dem Satz von Arzela-Ascoli und einer Version des Fixpunktsatzes von Schauder beruht. Um die im Fixpunktsatz von Schauder geforderte Selbstabbildungseigenschaft zu erfüllen, wird in der Regel nur die Existenz von Kurzzeitlösungen gezeigt und dann mit Hilfe des üblichen Fortsetzungsarguments und A-priori-Abschätzungen eine globale Lösung konstruiert. Um dieses Fortsetzungsargument anwenden zu können, muss der behandelte Operator $\mathbf{A}$ zumindest die Eigenschaft (∗∗) besitzen. In dieser Arbeit wird bewusst auf diese Eigenschaft verzichtet, was zur Folge hat, dass nicht zuerst die Existenz lokaler Galerkin-Lösungen, sondern sofort die globale Existenz gezeigt werden muss. Das Vorgehen beruht dann im Wesentlichen auf geeignetem Stauchen des untersuchten Fixpunktoperators, also Erzwingen der Selbstabbildungseigenschaft.

Wie üblich besteht eine weitere wesentliche Schwierigkeit eines Existenzbeweises für ein nichtlineares Problem mit Galerkin-Ansatz im Grenzübergang. Führt die schwache Konvergenz der Galerkin-Lösungen $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,V)$ gegen ein $\boldsymbol{y} \in L^p(I,V)$ im Falle eines linearen, stetigen und damit schwach stetigen Operators $\mathbf{A}$ zur schwachen Konvergenz der Bilder gegen $\mathbf{A}\boldsymbol{y}$, sodass sich $\boldsymbol{y}$ mit dem üblichen Vorgehen, wie beispielsweise in [SND16, Kapitel 7], als die gesuchte Lösung von (∗) identifizieren lässt, so gilt dies für einen nichtlinearen Operator $\mathbf{A}$ im Allgemeinen nicht. An dieser Stelle greift nun die besondere Struktur von Evolutionsgleichungen:

Nach [Edw65, Theorem 8.18.2 und 8.20.3] ist der Dualraum $(L^p(I,V))^*$ für reflexives V und $1 < p < \infty$ isometrisch isomorph zu $L^{p'}(I,V^*)$. Man kann also ohne Einschränkung annehmen, dass der betrachtete Operator $\mathbf{A}$ den Raum $L^p(I,V)$ in seinen Dualraum abbildet. Operatoren dieser Gestalt untersucht auch die Theorie monotoner Operatoren, die es ermöglicht, nichtlineare Operatoren über ihr verallgemeinertes Wachstumsverhalten zu kontrollieren. Von besonderer Bedeutung ist an dieser Stelle eine Eigenschaft, die alle in [Růž16], [Em04] und [GGZ74] beschriebenen Operatoren besitzen. Sie genügen alle der sogenannten Bedingung (M). Diese ermöglicht bei schwacher Konvergenz der Galerkin-Lösungen $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,V)$, schwacher Konvergenz der Bilder $(\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^{p'}(I,V^*)$ gegen einen Grenzwert $\boldsymbol{\xi} \in L^{p'}(I,V^*)$ und Kontrolle der Folge $(\langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne der Bedingung (M) $\boldsymbol{\xi}$ mit $\mathbf{A}\boldsymbol{y}$ zu identifizieren, also die schwache Stetigkeit eines linearen, stetigen Operators teilweise zu ersetzen. Der prägende Operator dieser Arbeit soll daher ein koerziver Operator sein, welcher der Bedingung (M) genügt und sich aus beschränkten und monotonen Anteilen zusammensetzt.

Den wichtigsten verwendeten Definitionen und Resultaten aus der Theorie monotoner Operatoren und der Bochner-Raum-Theorie widmet sich Kapitel 2. In Kapitel 3 wird, im Hinblick auf die Anwendung der später bewiesenen Resultate, der Frage nachgegangen, wann durch Operator-Familien $\{A(t)\}_{t\in I} : V \to V^*$, wie sie häufig in instationären Problemen auftreten, ein Operator $\mathbf{A} : L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$ mit den für den späteren Existenzsatz notwendigen Voraussetzungen induziert wird. Dabei dienen [Em04, Kapitel 8] und [Růž16, Kapitel 3] als Grundlage. Kapitel 4 führt noch einmal den Begriff der distributionellen Zeitableitung ein. Dabei wird nicht wie in [GGZ74, Kap. V] oder [SND16, Kapitel 4.2] der Zugang über den allgemeinen Begriff der Vektor-wertigen Distribution gewählt, sondern der Begriff der distributionellen Zeitableitung in Analogie zur schwachen Ableitung reellwertiger Funktionen definiert. In Kapitel 5 wird der Begriff des Evolutionstripels untersucht und die Grundlage für die ordnungsgemäße Einführung nichtlinearer Evolutionsgleichungen geschaffen. In Kapitel 6 wird zunächst das allgemeine Schema des verwendeten Galerkin-Ansatzes vermittelt, welches anschließend im Beweis eines Existenzsatzes für den Fall eines separablen Bildbereichs V Verwendung findet. Dessen Resultate werden in der Folge wiederum auf den Fall eines nur reflexiven Bildbereichs V verallgemeinert, wobei sich am Vorgehen in [Růž04, Kapitel 3, Satz 3.43] orientiert wird.

2 Mathematische Grundlagen

Stetigkeit

Zunächst sollen die notwendigen Stetigkeitsbegriffe eingeführt werden:

Definition 2.1: (Stetigkeitsbegriffe) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume. Dann bezeichne man den Operator $A : X \to Y$ als

(i) **stetig**, falls gilt: $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in $X \Rightarrow Ax_n \overset{n\to\infty}{\to} Ax$ in Y.

(ii) **schwach stetig**, falls gilt: $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ in $X \Rightarrow Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax$ in Y.

(iii) **demistetig**, falls gilt: $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in $X \Rightarrow Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax$ in Y.

(iv) **stark stetig**, falls gilt: $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ in $X \Rightarrow Ax_n \overset{n\to\infty}{\to} Ax$ in Y.

(v) **kompakt**, falls A stetig ist und beschränkte Mengen in X in relativ kompakte Mengen in Y abbildet.

(vi) **beschränkt**, falls A beschränkte Mengen in X in beschränkte Mengen in Y abbildet.

(vii) **lokal beschränkt**, falls zu $x \in X$ Konstanten $\varepsilon, K > 0$ existieren, sodass für alle $v \in X$ gilt:

$$\|x - v\|_X \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; \|Av\|_Y \leq K.$$

Lemma 2.2: Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume und $A : X \to Y$ ein demistetiger Operator.

(i) Ist $B : Y \to Z$ schwach stetig, dann ist $BA : X \to Z$ demistetig.

(ii) Ist $C : Y \to Z$ stark stetig, dann ist $CA : X \to Z$ stetig.

Beweis: Es gelte $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in X. Mit der Demistetigkeit von A folgt weiter $Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax$ in Y. Schließlich gilt:

$$BAx_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} BAx \text{ in } Z \text{ und } CAx_n \overset{n\to\infty}{\to} CAx \text{ in } Z$$

Also ist $BA : X \to Z$ demistetig und $CA : X \to Z$ stetig. ■

Lemma 2.3: Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer, kompakter Operator. Dann ist A stark stetig.

Beweis: Es gelte $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ in X. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ insbesondere beschränkt. Da A kompakt ist, existiert nun eine Teilfolge $(Ax_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ und ein $\xi \in Y$, sodass $Ax_{\psi(n)} \overset{n\to\infty}{\to} \xi$ in Y. Da A als linearer, stetiger Operator insbesondere schwach stetig ist und $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ immer noch schwach konvergent, gilt $Ax_{\psi(n)} \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax$ in Y. Die Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts liefert nun, dass $Ax = \xi$ in Y gelten muss, also $Ax_{\psi(n)} \overset{n\to\infty}{\to} Ax$ in Y. Da diese Argumentation für jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit von $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ gilt, ist Ax Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$. Mit dem Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1) folgt:

$$Ax_n \overset{n\to\infty}{\to} Ax \text{ in } Y.$$ ■

Monotone Operatoren

Von besonderer Bedeutung gerade im Hinblick auf nichtlineare Operatoren ist der Fall $Y = X^*$ mit reflexivem X. In diesem Fall kann der Begriff des Wachstums einer Funktion auf Operatoren verallgemeinert werden, obwohl in Banachräumen keine Anordnungsaxiome gelten, also nicht ausgedrückt werden kann, dass ein Element größer als ein anderes ist. Vor allem lässt sich mit den Begriffen der Monotonie und Koerzivität ausdrücken, dass Wachstum eine Richtung und ein Verhalten im Unendlichen besitzt. Im Reellen führen die Begriffe zu folgendem Resultat:

Dort ist bekannt, dass eine nicht konstante Gerade also ein linearer Operator jede reelle Zahl genau einmal annimmt, dies aber für nichtlineare Funktionen im Allgemeinen nicht gilt. Ist sie allerdings stetig und strebt im Negativen gegen $-\infty$, im Positiven gegen ∞, dann liefert der Zwischenwertsatz, dass sie surjektiv sein muss. Bei strikt monotonem Wachstum ist sie sogar injektiv. Es lassen sich also Eigenschaften einer stetigen Funktion aus ihrem Wachstumsverhalten ablesen. Diese Methode lässt sich auch weitestgehend auf den Banachraum-wertigen Fall übertragen und führt zu den folgenden verallgemeinerten Wachstumsbegriffen:

Definition 2.4: (Verallgemeinerte Wachstumsbegriffe) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum. Dann heißt der Operator $A : X \to X^*$

(i) **monoton**, falls $\langle Ax - Ay, x - y\rangle_X \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

(ii) **strikt monoton**, falls $\langle Ax - Ay, x - y\rangle_X > 0$ für alle $x \neq y \in X$.

(iii) **koerziv**, falls gilt: $\lim_{\|x\|_X \to \infty} \frac{\langle Ax, x\rangle_X}{\|x\|_X} = \infty$.

Lemma 2.5: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum. Der Operator $A : X \to X^*$ sei monoton, dann ist A lokal beschränkt.

Beweis: Siehe [Růž04, Lemma 1.4 (iii)]. ■

Das folgende Lemma ermöglicht, auch Bilder von Galerkinlösungen unter Operatoren mit nicht beschränkten Anteilen zu kontrollieren, solange diese monoton sind. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung von [GGZ74, Kap. III, Folgerung 1.2], die in dieser angepassten Form später besser angewandt werden kann:

Lemma 2.6: (Beschränktheitskriterium für monotone Operatoren mit beschränkter Störung) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum. Der Operator $A_0 : X \to X^*$ sei monoton und $B : X \to X^*$ beschränkt. Für den Operator $A := A_0 + B : X \to X^*$ und die Menge $S \subseteq X$ existiere eine Funktion $h : X \to [0, 1]$, sodass

$$\|s\|_X \leq M \text{ und } h(s)\langle As, s\rangle_X \leq C \text{ für alle } s \in S.$$

Dann existiert eine Konstante $K > 0$, die nur von $C, M > 0$ und A abhängt, sodass

$$\|h(s)As\|_{X^*} \leq K \text{ für alle } s \in S.$$

Beweis: Da A_0 monoton und $0 \leq h \leq 1$ ist, gilt für alle $s \in S$ und $x \in X$, dass

$$\begin{aligned} h(s)\langle A_0 s, x\rangle_X &\leq h(s)\left(\langle A_0 s, s\rangle_X + \langle A_0 x, x - s\rangle_X\right) = h(s)\left(\langle As, s\rangle_X - \langle Bs, s\rangle_X + \langle A_0 x, x - s\rangle_X\right) \\ &\leq C + \|Bs\|_{X^*} M + \|A_0 x\|_{X^*}\left(\|x\|_X + M\right). \end{aligned}$$

Da B beschränkt und A_0 nach Lemma 2.5 lokal beschränkt ist, existieren Konstanten $C_B, C_0, \varepsilon > 0$, sodass

$$\|Bs\|_{X^*} \leq C_B \text{ für alle } s \in S \text{ und } \|A_0 x\|_{X^*} \leq C_0 \text{ für alle } x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq \varepsilon.$$

Mit einer skalierten Version der Normformel folgt weiter, dass für alle $s \in S$ gilt:

$$\|h(s)A_0 s\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X = \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} h(s)\langle A_0 s, x\rangle_X \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(C + C_B M + C_0(\varepsilon + M)\right),$$

also schließlich ein $K > 0$, sodass $\|h(s)As\|_{X^*} \leq K$ für alle $s \in S$. ■

Die zentrale Eigenschaft dieser Arbeit stellt die sogenannte Bedingung (M) dar. Denn sie beschreibt einen Stetigkeitsbegriff, der dem der schwachen Stetigkeit linearer Operatoren sehr nahe kommt oder ihn zumindest in vielen Fällen weitestgehend ersetzt. Grob umschrieben liefert sie Voraussetzungen, unter denen für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ aus $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ in X folgt, dass $Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax$ in X^*. Diese Voraussetzungen umfassen die schwache Konvergenz von $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ gegen einen zunächst unbekannten Grenzwert und die Kontrolle der Folge $(\langle Ax_n, x_n\rangle_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne der Bedingung (M). Die Bedingung (M) ist gerade im Hinblick auf in der Regel nur schwach konvergente Folgen von Galerkin-Lösungen von zentraler Bedeutung, da sie den Grenzübergang auch ohne schwache Stetigkeit ermöglicht. Inwiefern $(\langle Ax_n, x_n\rangle_X)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ kontrolliert werden muss, klärt die nächste Definition:

Definition 2.7: (Bedingung (M)) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum. Dann genügt der Operator $A : X \to X^*$ der **Bedingung (M)**, falls für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ aus

$$\begin{aligned} x_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X, \\ Ax_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \xi \text{ in } X^*, \\ \text{und } \limsup_{n\to\infty} &\langle Ax_n, x_n\rangle_X \leq \langle \xi, x\rangle_X \end{aligned}$$

folgt, dass $Ax = \xi$ in X^*.

Lemma 2.8: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum. Dann gilt:

(i) Ist $A : X \to X^*$ monoton und **radialstetig**, das heißt für alle $x, y \in X$ ist

$$(t \mapsto \langle A(x + ty), y\rangle_X) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

stetig. Dann genügt A der Bedingung (M).

(ii) Ist $B : X \to X^*$ stark stetig und genügt $A : X \to X^*$ der Bedingung (M), dann genügt $A + B$ der Bedingung (M).

(iii) Ist $A : X \to X^*$ lokal beschränkt und genügt der Bedingung (M), dann ist A demistetig.

Beweis:

ad (i): Siehe [GGZ74, Kap. III, Lemma 1.3].

ad (ii): Siehe [Růž04, Kapitel 3, Lemma 2.4].

ad (iii): Hier geht man analog zu [Růž04, Kapitel 3, Lemma 1.4 (iv)] vor: Es gelte also $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ in X. Die lokale Beschränktheit von A liefert nun, dass $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ beschränkt ist. Mit der Reflexivität von X^* und dem Satz von Eberlein-Šmulian (cf. Satz A.6) folgt nun die Existenz einer Teilfolge $(Ax_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ und eines $\xi \in X^*$, sodass $Ax_{\psi(n)} \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \xi$ in X^*. Da $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ immer noch stark konvergiert, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ax_{\psi(n)}, x_{\psi(n)}\rangle_X = \langle \xi, x\rangle_X.$$

Die Bedingung (M) liefert nun $Ax = \xi$ in X^*, das heißt $Ax_{\psi(n)} \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax$ in X^*. Da diese Argumentation für jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch von $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ gilt, ist Ax schwacher Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$. Das Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1) liefert nun, dass

$$Ax_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Ax \text{ in } X^*. \qquad \blacksquare$$

Von besonderer Bedeutung gerade im Hinblick auf das später zu konstruierende Galerkin-Verfahren ist, Operatoren auf Teilräume des ursprünglichen Definitionsbereichs zu beschränken und zu untersuchen, inwiefern sich ihre Eigenschaften ver- und erhalten. Dabei ist vor allem der Begriff der Einbettung wichtig, welcher in dieser Arbeit immer einen injektiven, linearen und stetigen Operator bezeichnet:

Lemma 2.9: (Einschränkung von Operatoren bezüglich Einbettung) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $J : Y \to X$ eine Einbettung und $A : X \to X^*$ ein Operator. Bezeichne $J^* : X^* \to Y^*$ den zu J **adjungierten Operator**, definiert durch

$$\langle J^*x^*, y\rangle_Y := \langle x^*, Jy\rangle_X \text{ für alle } y \in Y, x^* \in X^*.$$

Dann heißt $A_J := J^*AJ : Y \to Y^*$ die **Einschränkung von A bezüglich J** und es gilt:

$$\langle A_J y, \tilde{y}\rangle_Y = \langle AJy, J\tilde{y}\rangle_X \text{ für alle } y, \tilde{y} \in Y.$$

Des Weiteren gilt:

(i) Ist A beschränkt, dann ist auch A_J beschränkt.

(ii) Ist A injektiv und $\overline{R(J)}^{\|\cdot\|_X} = X$, dann ist auch A_J injektiv.

(iii) Ist A monoton, dann ist auch A_J monoton.

(iv) Ist A koerziv und J zusätzlich isometrisch, das heißt es gilt $\|Jy\|_X = \|y\|_Y$ für alle $y \in Y$, dann ist auch A_J koerziv.

(v) Sind X, Y reflexiv, $A_0 : X \to X^*$ monoton und $B : X \to X^*$ beschränkt, sodass $A := A_0 + B : X \to X^*$ der Bedingung (M) genügt, dann genügt auch A_J der Bedingung (M). Insbesondere ist A_J dann demistetig.

Beweis: Die Wohldefiniertheit ist evident. Dass $\langle A_J y, \tilde{y}\rangle_Y = \langle AJy, J\tilde{y}\rangle_X$ für alle $y, \tilde{y} \in Y$, folgt direkt aus der Definition von A_J und J^*.

ad (i): Die Definition von J^* sichert offensichtlich dessen Linearität. Wegen

$$\langle J^*x^*, y\rangle_Y = \langle x^*, Jy\rangle_X \leq \|x^*\|_{X^*} |||J|||_{\mathcal{L}(Y,X)} \|y\|_Y$$

ist J^* außerdem stetig. Da für lineare Operatoren Stetigkeit und Beschränktheit äquivalent sind, ist A_J als Verknüpfung beschränkter Operatoren wieder beschränkt.

ad (ii): Ist nun A injektiv und $\overline{R(J)}^{\|\cdot\|_X} = X$, dann folgt aus $A_J y = A_J \tilde{y}$ in Y^*, dass

$$0 = \langle A_J y - A_J \tilde{y}, z\rangle_Y = \langle AJy - AJ\tilde{y}, Jz\rangle_X \text{ für alle } z \in Y.$$

Wegen $\overline{R(J)}^{\|\cdot\|_X} = X$, ist dann $AJy = AJ\tilde{y}$ in X^*. Die Injektivität von A und J liefert nun, dass $y = \tilde{y}$ in Y, also die Injektivität von A_J.

ad (iii): Ist A monoton, dann gilt für beliebige $y, \tilde{y} \in Y$, dass

$$\langle A_J y - A_J \tilde{y}, y - \tilde{y}\rangle_Y = \langle AJy - AJ\tilde{y}, Jy - J\tilde{y}\rangle_X \geq 0.$$

ad (iv): Mit der Koerzivität von A und der Isometrieeigenschaft von J folgt, dass

$$\lim_{\|y\|_Y \to \infty} \frac{\langle A_J y, y\rangle_Y}{\|y\|_Y} = \lim_{\|Jy\|_X \to \infty} \frac{\langle AJy, Jy\rangle_X}{\|Jy\|_X} = \infty.$$

ad (v): Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ eine Folge, sodass gilt:

$$\begin{aligned} y_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} y \text{ in } Y \\ A_J y_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \xi \text{ in } Y^* \\ \limsup_{n\to\infty} \langle A_J y_n, y_n\rangle_Y &\leq \langle \xi, y\rangle_Y \end{aligned}$$

Dann sind insbesondere $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ und $(A_J y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y^*$ beschränkte Folgen. Also erhält man mit der Beschränktheit von J, dass

$$\|Jy_n\|_X \leq M \text{ und } \langle AJy_n, Jy_n\rangle_X = \langle A_J y_n, y_n\rangle_Y \leq \|A_J y_n\|_{Y^*}\|y_n\|_Y \leq M'$$

Da A_0 monoton und B beschränkt ist, liefert Lemma 2.6 für $S = (Jy_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $h \equiv 1$ nun ein $K > 0$, sodass $\|AJy_n\|_{X^*} \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reflexivität von X^* liefert zusammen mit dem Satz von Eberlein-Šmulian (cf. Satz A.6) eine Teilfolge $(AJy_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ und ein $\eta \in X^*$, sodass $AJy_{\psi(n)} \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \eta$ in X^*. Da J^* und J schwach stetig sind und $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ immer noch schwach konvergent, gilt insbesondere

$$\begin{aligned} Jy_{\psi(n)} &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Jy \text{ in } X \\ A_J y_{\psi(n)} = J^* AJy_{\psi(n)} &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} J^*\eta \text{ in } Y^*, \end{aligned}$$

also $J^*\eta = \xi$ in Y^* wegen der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts. Schließlich gilt:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle AJy_{\psi(n)}, Jy_{\psi(n)}\rangle_X &= \limsup_{n\to\infty} \langle A_J y_{\psi(n)}, y_{\psi(n)}\rangle_Y \\ &\leq \langle \xi, y\rangle_Y = \langle J^*\eta, y\rangle_Y = \langle \eta, Jy\rangle_X \end{aligned}$$

Da A der Bedingung (M) genügt, muss dann schon $AJy = \eta$ in X^*, also $A_J y = J^* AJy = J^*\eta = \xi$ in Y^* gelten. Damit genügt A_J der Bedingung (M). Mit dem bereits Bewiesenen ist $(A_0)_J$ monoton und B_J beschränkt. Lemma 2.5 liefert, dass $(A_0)_J$ und damit auch A_J lokal beschränkt sind. Zusammen mit der Bedingung (M) folgt aus Lemma 2.8 (iii) schließlich die Demistetigkeit von A_J. ■

Bochner-Lebesgue-Räume

Bezeichne $C^0(\overline{I}, X)$ und $C^1(\overline{I}, X)$ den Raum der auf $\overline{I}$ stetigen beziehungsweise stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X. Diese sind wie in [GGZ74, Kap. IV, Definition 1.1] definiert und gemäß [GGZ74, Kap. IV, Satz 1.1] ausgestattet mit ihren kanonischen Normen Banachräume.

Seien außerdem die Begriffe Bochner-Messbarkeit und Bochner-Integral wie üblich definiert, zum Beispiel wie in [GGZ74, Kap. IV, Definitionen 1.4 und 1.5] oder [SND16, Kap. 1]. Des Weiteren benötigt diese Arbeit die folgenden Resultate:

Satz 2.10: (Pettis) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0, T)$ und $0 < T < \infty$. Dann ist $\boldsymbol{x} : I \to X$ genau dann Bochner-messbar, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

- **(i) Schwache Messbarkeit**: Für alle $x^* \in X^*$ ist $\langle x^*, \boldsymbol{x}(\cdot)\rangle_X : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar.
- **(ii) Fast Separabelwertigkeit**: Es existiert eine Lebesgue-Nullmenge $N \in \mathcal{L}(I)$, sodass $R(\boldsymbol{x}_{|_{I\setminus N}})$ separabel ist.

Beweis: Siehe [SND16, Kapitel 1, Satz 1.18]. ■

Folgerung 2.11: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0, T)$ und $0 < T < \infty$. Ist $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to X$ eine Folge Bochner-messbarer Funktionen und $\boldsymbol{x} : I \to X$, sodass

$$\boldsymbol{x}_n(t) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{x}(t) \text{ in } X \text{ für fast alle } t \in I.$$

Dann ist $\boldsymbol{x} : I \to X$ Bochner-messbar.

Beweis: Der Satz von Pettis liefert, dass $\langle x^*, \boldsymbol{x}_n(\cdot)\rangle_X$ Lebesgue-messbar ist und eine Folge von Lebesgue-Nullmengen $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(I)$ existiert, sodass $R(\boldsymbol{x}_{n|_{I\setminus N_n}})$ separabel ist. Dann ist

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(\boldsymbol{x}_{n|_{I\setminus N_n}})\right)$$

als abzählbare Vereinigung und konvexe Hülle separabler Mengen ebenfalls separabel. Nach Voraussetzung existiert eine Lebesgue-Nullmenge $N \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$, sodass für alle $x^* \in X^*$ gilt:

$$\langle x^*, \boldsymbol{x}_n(t)\rangle_X \overset{n\to\infty}{\to} \langle x^*, \boldsymbol{x}(t)\rangle_X \text{ für alle } t \in I \setminus N.$$

Damit ist $\langle x^*, \boldsymbol{x}(\cdot)\rangle_X$ als fast überall punktweiser Grenzwert Lebesgue-messbarer Funktionen wieder Lebesgue-messbar. Da konvexe Mengen genau dann schwach abgeschlossen sind, wenn sie stark abgeschlossen sind, folgt zusammen mit der fast überall punktweisen schwachen Konvergenz, dass

$$R(\boldsymbol{x}_{|_{I\setminus N}}) \subseteq \overline{\operatorname{conv}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(\boldsymbol{x}_{n|_{I\setminus N_n}})\right)}^{\tau(X,X^*)} = \overline{\operatorname{conv}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(\boldsymbol{x}_{n|_{I\setminus N_n}})\right)}^{\|\cdot\|_X}.$$

Damit ist $R(\boldsymbol{x}_{|_{I\setminus N}})$ als Teilmenge einer separablen Menge wieder separabel. Schließlich ist $\boldsymbol{x} : I \to X$ schwach messbar und fast separabelwertig. Der Satz von Pettis liefert nun die Behauptung. ■

Definition 2.12: (Bochner-Lebesgue-Räume) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann heißt der Quotientenraum bezüglich der Relation $\sim$, welche Gleichheit fast überall in X auf I entspricht,

$$L^p(I,X) := \left\{ \boldsymbol{x} : I \to X \middle| \boldsymbol{x} \text{ Bochner-messbar und } \|\boldsymbol{x}(\cdot)\|_X \in L^p(I) \right\}_{/\sim}$$

Bochner-Lebesgue-Raum.

Satz 2.13: (Eigenschaften von Bochner-Lebesgue-Räumen) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt:

(i) $L^p(I,X)$ definiert versehen mit der Norm

$$\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)} := \left(\int_I \|\boldsymbol{x}(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$
$$\text{und } \|\boldsymbol{x}\|_{L^\infty(I,X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \|\boldsymbol{x}(t)\|_X \qquad \text{für } p = \infty.$$

einen Banachraum.

(ii) Es gilt die Einbettung $C^0(\overline{I}, X) \hookrightarrow L^p(I,X)$.

(iii) Für $1 \leq p < \infty$ liegt $\mathcal{S}(I,X)$ die Menge der einfachen Funktionen mit Werten in X dicht in $L^p(I,X)$.

(iv) Für reflexives X und $1 < p < \infty$ ist $L^p(I,X)$ reflexiv.

Beweis: **ad (i):** Siehe [GGZ74, Kap. IV, Satz 1.11], **ad (ii):** Siehe [SND16, Kapitel 2, Korollar 2.10], **ad (iii):** Siehe [GGZ74, Kap. IV, Lemma 1.3] und **ad (iv):** Siehe [Edw65, Theorem 8.18.2 und 8.20.3]. ■

Satz 2.14: (Darstellung der Dualität in Bochner-Lebesgue-Räumen) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p < \infty$. Dann ist der Operator $\mathbf{T} : L^{p'}(I, X^*) \to (L^p(I,X))^*$ mit

$$\langle \mathbf{T}\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x} \rangle_{L^p(I,X)} := \int_I \langle \boldsymbol{x}^*(s), \boldsymbol{x}(s) \rangle_X ds \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in L^p(I,X), \boldsymbol{x}^* \in L^{p'}(I,X^*)$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: Siehe [Edw65,Theorem 8.18.2 und 8.20.3]. ■

Bemerkung 2.15: Aufgrund von Satz 2.14 wird im Folgenden nicht mehr zwischen den Räumen $(L^p(I,X))^*$ und $L^{p'}(I,X^*)$ oder $\mathbf{T}\boldsymbol{x}^*$ und $\boldsymbol{x}^*$ unterschieden.

3 Operatoren auf Bochner-Lebesgue-Räumen

In der Anwendung werden Operatoren $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^q(I,Y)$ in der Regel durch die Vorschrift

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{x})(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) \text{ in } Y \text{ für fast alle } t \in I,$$

definiert, wobei $A(t) : X \to Y$ zeitabhängige Operatoren sind, die meistens durch ein instationäres Problem motiviert sind. Da trotzdem nicht jeder Operator zwischen Bochner-Lebesgue-Räumen durch solche zeitabhängigen Operatoren gegeben ist, sollen diese eine eigene Bezeichnung erhalten:

Definition 3.1: (Induzierte Operatoren) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p,q \leq \infty$. Dann heißt $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^q(I,Y)$ durch eine Operatorfamilie $\{A(t)\}_{t\in I}$ **induziert**, falls diese für fast alle $t \in I$ einen Operator $A(t) : X \to Y$ definiert, sodass für $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$ gilt:

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{x})(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) \text{ in } Y \text{ für fast alle } t \in I.$$

Definition 3.2: (Caratheodory- und Majoranten-Bedingung) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p,q < \infty$. Dann genügt die Operatorfamilie $\{A(t)\}_{t\in I}$ der

(i) **Caratheodory-Bedingung**, falls

- **(a)** $A(t) : X \to Y$ für fast alle $t \in I$ wohldefiniert und demistetig ist.
- **(b)** $A(\cdot)x : I \to Y$ für alle $x \in X$ Bochner-messbar ist.

(ii) **(p,q)-Majoranten-Bedingung**, falls $0 \leq k \in L^q(I)$ und $C > 0$ existieren, sodass für fast alle $t \in I$ und $x \in X$ gilt

$$\|A(t)x\|_Y \leq k(t) + C\|x\|_X^{\frac{p}{q}}$$

Das folgende Lemma liefert nun hinreichende Bedingungen an eine Operator-Familie $\{A(t)\}_{t\in I}$, sodass durch diese ein Operator $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^q(I,Y)$ induziert wird:

Lemma 3.3: (Nemyckii-Operator) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p,q < \infty$ und die Operator-Familie $\{A(t)\}_{t\in I} : X \to Y$ genüge der Caratheodory- und (p,q)-Majoranten-Bedingung. Dann ist der durch $\{A(t)\}_{t\in I}$ induzierte **Nemyckii-Operator** $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^q(I,Y)$ wohldefiniert und beschränkt, für reflexives Y auch demistetig. Ist $\{A(t)\}_{t\in I}$ zusätzlich eine Familie von stetigen Operatoren, dann ist $\mathbf{A}$ ebenfalls stetig.

Beweis: Der Beweis für zeitlich konstante Operator-Familien bei separablem Y ist auch in [Růž16, Kapitel 3, Lemma 2.61] zu finden. Dieser Beweis läuft im Wesentlichen analog, muss an einigen Stellen allerdings verändert werden:

1. **Wohldefiniertheit und Beschränktheit**: Sei nun $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$. Dann existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I,X)$, das heißt $\boldsymbol{s}_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} s_i^n 1_{B_i^n}(t)$, wobei $s_i^n \in X$ und $B_i^n \in \mathcal{L}(I)$ mit $B_i^n \cap B_j^n = \emptyset$ für $i \neq j$, die fast überall punktweise in X

gegen $\boldsymbol{x}$ konvergiert. Nach Voraussetzung ist $A(\cdot)s_i^n$ und damit auch

$$A(\cdot)\boldsymbol{s}_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{k_n} 1_{B_i^n}(\cdot)A(\cdot)s_i^n + 1_{I\setminus\bigcup_{i=1}^{k_n} B_i^n}(\cdot)A(\cdot)0$$

Bochner-messbar und konvergiert, aufgrund der Demistetigkeit von $A(t) : X \to Y$ für fast alle $t \in I$, fast überall schwach gegen $A(\cdot)\boldsymbol{x}(\cdot)$ in Y. Folgerung 2.11 liefert nun die Bochner-Messbarkeit von $A(\cdot)\boldsymbol{x}(\cdot)$. Wegen

$$\left(\int_I \|A(s)\boldsymbol{x}(s)\|_Y^q \, ds\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_I \left(k(s) + C\|\boldsymbol{x}(s)\|_X^{\frac{p}{q}}\right)^q \, ds\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|k\|_{L^q(I)} + C\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)}^{\frac{p}{q}},$$

wobei von der Minkowski-Ungleichung und $\|\boldsymbol{x}(\cdot)\|_X \in L^p(I)$ (cf. Definition 2.12) Gebrauch gemacht wurde, ist $A(\cdot)\boldsymbol{x}(\cdot) \in L^q(I,Y)$, also $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^q(I,Y)$ wohldefiniert. Insbesondere folgt damit auch schon die Beschränktheit von $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^q(I,Y)$.

2. **Demistetigkeit**: Sei Y reflexiv und $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I,X)$, sodass $\boldsymbol{x}_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{x}$ in $L^p(I,X)$, also insbesondere $\|\boldsymbol{x}_n(\cdot) - \boldsymbol{x}(\cdot)\|_X \overset{n\to\infty}{\to} 0$ in $L^p(I)$ (cf. Definition 2.12). Nach der Umkehrung des klassischen Konvergenzsatzes von Lebesgue, existiert eine Teilfolge, sodass $\|\boldsymbol{x}_{\psi(n)}(t) - \boldsymbol{x}(t)\|_X \overset{n\to\infty}{\to} 0$ für fast alle $t \in I$. Für $\boldsymbol{y}^* \in L^{q'}(I,Y^*)$ ($q' := \frac{q}{q-1}$) gilt dann aufgrund der Demistetigkeit von $A(t) : X \to Y$, dass

$$\langle \boldsymbol{y}^*(t), A(t)\boldsymbol{x}_{\psi(n)}(t)\rangle_Y \overset{n\to\infty}{\to} \langle \boldsymbol{y}^*(t), A(t)\boldsymbol{x}(t)\rangle_Y \text{ für fast alle } t \in I.$$

Für beliebiges Lebesgue-messbares $B \in \mathcal{L}(I)$ gilt mit der Hölder-Ungleichung analog zur obigen Abschätzung, dass

$$\begin{aligned}\int_B |\langle \boldsymbol{y}^*(s), A(s)\boldsymbol{x}_{\psi(n)}(s)\rangle_Y| \, ds &\leq \|\boldsymbol{y}^*\|_{L^{q'}(I,Y^*)}\|1_B\mathbf{A}\boldsymbol{x}_{\psi(n)}\|_{L^q(I,Y)} \\ &\leq \|\boldsymbol{y}^*\|_{L^{q'}(I,Y^*)}\left(\|1_B k\|_{L^q(I)} + C\|1_B\boldsymbol{x}_{\psi(n)}\|_{L^p(I,X)}^{\frac{p}{q}}\right),\end{aligned}$$

Da $k \in L^q(I)$ und $(\|\boldsymbol{x}_{\psi(n)}(\cdot)\|_X^p)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$ als konvergente Folge im klassischen Sinn gleichgradig integrierbar sind und $B \in \mathcal{L}(I)$ beliebig gewählt war, ist auch

$$(\langle \boldsymbol{y}^*(\cdot), A(\cdot)\boldsymbol{x}_{\psi(n)}(\cdot)\rangle_Y)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$$

im klassischen Sinn gleichgradig-integrierbar. Zusammen mit der fast überall punktweisen Konvergenz liefert nun der klassische Konvergenzsatz von Vitali (cf. Lemma A.5) unter Beachtung der Darstellung der Dualität in Bochner-Lebesgue-Räumen gemäß Satz 2.14, dass

$$\langle \boldsymbol{y}^*, \mathbf{A}\boldsymbol{x}_{\psi(n)} - \mathbf{A}\boldsymbol{x}\rangle_{L^q(I,Y)} = \int_I \langle \boldsymbol{y}^*(s), A(s)\boldsymbol{x}_{\psi(n)}(s) - A(s)\boldsymbol{x}(s)\rangle_Y ds \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Da diese Argumentation für alle Teilfolgen gilt, ist $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ schwacher Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(\mathbf{A}\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das Teilfolgenargument (cf. Lemma A.1) liefert nun die schwache Konvergenz der gesamten Folge.

Die Stetigkeit im Fall einer stetigen Operator-Familie $\{A(t)\}_{t\in I}$ folgt analog, wenn man an den entsprechenden Stellen $\langle \boldsymbol{y}^*(t), \cdot\rangle_Y$ durch $\|\cdot\|_Y^q$ ersetzt. ■

Eine sehr ergiebige Folgerung aus Lemma 3.3 erhält man durch Betrachten von linearen, stetigen Operatoren.

Folgerung 3.4: (Linear-induzierte Operatoren zwischen Bochner-Lebesgue-Räumen) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ und $A : X \to Y$ linear und stetig. Dann ist der induzierte Operator $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$ wohldefiniert, linear und stetig. Insbesondere gilt für alle $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$ die Integralidentität

$$A\left(\int_I \boldsymbol{x}(s)ds\right) = \int_I (\mathbf{A}\boldsymbol{x})(s)ds \text{ in } Y \tag{3.4.1}$$

Ist $A : X \to Y$ ein Isomorphismus, dann $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$ ebenfalls.

Beweis: $A : X \to Y$ ist linear und stetig. Daher überträgt A die Approximation durch einfache Funktionen auf deren Bilder und erhält so die Bochner-Messbarkeit. Aus $\|Ax\|_Y \leq \|\|A\|\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X$ folgen die Wohldefiniertheit und Stetigkeit von $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$. Die Linearität von A überträgt sich laut Definition direkt auf $\mathbf{A}$, sodass (3.4.1) wie man leicht einsieht auf $\mathcal{S}(I,X)$ bereits gilt. Da $\mathcal{S}(I,X)$ nach Satz 2.13 (iii) dicht in $L^1(I,X)$ liegt und beide Seiten in (3.4.1) mit dem bereits Bewiesenen stetig auf $L^1(I,X)$ sind, muss (3.4.1) schon auf ganz $L^p(I,X)$ gelten.

Ist nun A ein Isomorphismus, das heißt $A^{-1} : Y \to X$ existiert, ist linear und stetig. Dann liefert das bereits Bewiesene, dass $\mathbf{B} : L^p(I,Y) \to L^p(I,X)$ mit $(\mathbf{B}\boldsymbol{y})(t) = A^{-1}\boldsymbol{y}(t)$ in X für fast alle $t \in I$ und $\boldsymbol{y} \in L^p(I,Y)$ wohldefiniert, linear und stetig ist. Wegen

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}\mathbf{A}\boldsymbol{x})(t) &= A^{-1}A(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}(t) \text{ in } X\\ \text{und } (\mathbf{A}\mathbf{B}\boldsymbol{y})(t) &= AA^{-1}(\boldsymbol{y}(t)) = \boldsymbol{y}(t) \text{ in } Y \text{ für fast alle } t \in I\end{aligned}$$

gilt $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ in $\mathcal{L}(L^p(I,Y), L^p(I,X))$. Daher besitzt $\mathbf{A}$ eine stetige Inverse und ist ein Isomorphismus. ■

Bemerkung 3.5: Da der induzierte Operator $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$ in Folgerung 3.4 für alle $1 \leq p \leq \infty$ wohldefiniert, linear und stetig ist, unterscheidet man der Einfachheit halber im Folgenden nicht zwischen $\mathbf{A}$ und dem durch A induzierten Operator $\tilde{\mathbf{A}} : L^q(I,X) \to L^q(I,Y)$ mit $1 \leq q \leq \infty$ und $q \neq p$.

Für den Fall, dass X reflexiv ist, $q = \frac{p}{p-1}$ und $Y = X^*$ liefert Satz 2.14, dass $(L^p(I,X))^* \cong L^{p'}(I,X^*)$. In diesem Fall sind die Begriffe Monotonie und Koerzivität (cf. Definition 2.4) für Operatoren $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^{p'}(I,X^*)$ definiert und man kann sich fragen, welche Forderungen an eine Operator-Familie $\{A(t)\}_{t\in I} : X \to X^*$ hinreichend sind, sodass der induzierte Operator einem dieser Begriffe genügt.

Folgerung 3.6: (Induzierte Eigenschaften) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $p' := \frac{p}{p-1}$ und $\{A(t)\}_{t\in I}$ eine Operator-Familie. Dann gilt:

(i) Ist $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^{p'}(I,X^*)$ mit $(\mathbf{A}\boldsymbol{x})(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t)$ in X^* für fast alle $t \in I$ wohldefiniert und existieren $\lambda \in L^1(I)$ und $M > 0$, sodass für fast alle $t \in I$ und alle $x \in X$ gilt:

$$\langle A(t)x, x\rangle_X \geq \lambda(t) + M\|x\|_X^p$$

Dann ist der durch $\{A(t)\}_{t\in I}$ induzierte Operator $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^{p'}(I,X^*)$ koerziv.

(ii) Sei $\{A(t)\}_{t\in I}$ eine Operatorfamilie, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. $A(t) : X \to X^*$ ist für fast alle $t \in I$ wohldefiniert, monoton und radialstetig.
2. $A(\cdot)x : I \to X^*$ ist für alle $x \in X$ Bochner-messbar.
3. $\{A(t)\}_{t\in I}$ erfüllt die (p,p')-Majoranten-Bedingung.

Dann ist der durch $\{A(t)\}_{t\in I}$ induzierte Operator $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^{p'}(I,X^*)$ wohldefiniert, beschränkt, demistetig und monoton. Insbesondere genügt $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^{p'}(I,X^*)$ der Bedingung (M). Für separables X folgt 2. bereits aus folgender Bedingung:

2^*. $\langle A(\cdot)x, \tilde{x}\rangle_X : I \to \mathbb{R}$ ist für alle $x, \tilde{x} \in X$ Lebesgue-messbar.

Beweis:

ad (i): Offensichtlich gilt für $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$:

$$\langle A(t)\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t)\rangle_X \geq \lambda(t) + M\|\boldsymbol{x}(t)\|_X^p \text{ für fast alle } t \in I.$$

Integration über I liefert dann: $\langle \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle_{L^p(I,X)} \geq \int_I \lambda(s)ds + M\|\boldsymbol{x}\|^p_{L^p(I,X)}$. Also schließlich

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)}\to\infty} \frac{\langle \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle_{L^p(I,X)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)}} \geq \lim_{\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)}\to\infty} \left[-\frac{\|\lambda\|_{L^1(I)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)}} + M\|\boldsymbol{x}\|^{p-1}_{L^p(I,X)}\right] = \infty,$$

da $p > 1$ nach Voraussetzung.

ad (ii): Mit Lemma 2.5 und Lemma 2.8 (i) ist $A(t) : X \to X^*$ für fast alle $t \in I$ lokal beschränkt und genügt der Bedingung (M). Lemma 2.8 (iii) sichert nun die Demistetigkeit von $A(t) : X \to X^*$ für fast alle $t \in I$. Damit erfüllt $\{A(t)\}_{t\in I}$ die Caratheodory-Bedingung. Zusammen mit der (p,p')-Majoranten-Bedingung liefert Lemma 3.3 weiter, dass $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^{p'}(I,X^*)$ wohldefiniert, beschränkt und demistetig ist. Da $A(t) : X \to X^*$ für fast alle $t \in I$ monoton ist, gilt insbesondere für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L^p(I,X)$:

$$\langle A(t)\boldsymbol{x}(t) - A(t)\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\rangle_X \geq 0 \text{ für fast alle } t \in I.$$

Integration über I zusammen mit der Darstellung der Dualität in Bochner-Lebesgue-Räumen gemäß Satz 2.14 liefert schließlich:

$$\langle \mathbf{A}\boldsymbol{x} - \mathbf{A}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle_{L^p(I,X)} \geq 0 \text{ für alle } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L^p(I,X).$$

Mit Lemma 2.8 (i) genügt $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^{p'}(I,X^*)$ als monotoner, radialstetiger Operator insbesondere der Bedingung (M).

Sei nun 2^*. erfüllt und X separabel. Da X reflexiv ist, ist die kanonische Isometrie $J_X : X \to X^{**}$, definiert durch $\langle J_X x, x^*\rangle_{X^*} := \langle x^*, x\rangle_X$ für alle $x \in X$ und $x^* \in X^*$, surjektiv. Das heißt für alle $x^{**} \in X^{**}$ existiert ein $x \in X$, sodass $J_X x = x^{**}$ in X^{**}. Insbesondere folgt damit und mit 2^*. aus

$$\langle x^{**}, A(\cdot)\tilde{x}\rangle_{X^*} = \langle J_X x, A(\cdot)\tilde{x}\rangle_{X^*} = \langle A(\cdot)\tilde{x}, x\rangle_X \text{ für alle } x^{**} \in X^{**},$$

dass $A(\cdot)\tilde{x} : I \to X^*$ für alle $\tilde{x} \in X$ schwach messbar ist (cf. Satz 2.10 (i)). Da X^* als Dualraum eines separablen und reflexiven Banachraums wieder separabel ist, ist $A(\cdot)\tilde{x} : I \to X^*$ für alle $\tilde{x} \in X$ fast separabelwertig (cf. Satz 2.10 (ii)). Der Satz von Pettis liefert nun, dass $A(\cdot)\tilde{x} : I \to X^*$ für alle $\tilde{x} \in X$ Bochner-messbar ist, also 2.. ■

4 Distributionelle Zeitableitung

Im Folgenden wird die distributionelle Zeitableitung eingeführt. Dabei beschränkt sich diese Arbeit auf die reguläre distributionelle Zeitableitung, die für Evolutionsgleichungen vollkommen ausreichend ist. Auf eine genaue Einführung in den Begriff der vektorwertigen Distribution wird deshalb verzichtet. Es sei allerdings auf den Zusammenhang hingewiesen, wie er beispielsweise in [GGZ74, Kap. V] oder [SND16, Kapitel 4.2] dargestellt ist. Der Zusatz „regulär“ wird im Folgenden weggelassen. Wie üblich bezeichne $C_0^\infty(I)$ den Raum der glatten Testfunktionen mit in I kompakt enthaltenem Träger.

Definition 4.1: (Distributionelle Zeitableitung) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $J : X \to Y$ eine Einbettung, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann besitzt $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$ eine **distributionelle Zeitableitung bezüglich** J in $L^q(I,Y)$, falls ein $\tilde{\boldsymbol{x}} \in L^q(I,Y)$ existiert, sodass gilt:

$$J\left(-\int_I \boldsymbol{x}(s)\varphi\prime(s)ds\right) = \int_I \tilde{\boldsymbol{x}}(s)\varphi(s)ds \text{ in } Y \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Man schreibt dann: $\frac{d_J\boldsymbol{x}}{dt} := \tilde{\boldsymbol{x}}$ oder für $J = \mathrm{Id}_X$ einfach $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} := \tilde{\boldsymbol{x}}$.

Bemerkung 4.2: (Wohldefiniertheit) Das auch für Bochner-Lebesgue-Funktionen geltende Fundamentallemma der Variationsrechnung, wie in [Em04, Kapitel 8, Satz 8.1.3] bewiesen, sichert die Eindeutigkeit der distributionellen Zeitableitung, also mithin deren Wohldefiniertheit. Insbesondere gilt für $\boldsymbol{x} \in C^1(\bar{I}, X)$ die Identität $\frac{d_J\boldsymbol{x}}{dt} = J\boldsymbol{x}\prime$ (cf. [GGZ74, Kap. IV, Bemerkung 1.16]). Außerdem sei darauf hingewiesen, dass diese Definition auch für lokal integrierbare Funktionen einen Sinn ergibt, da immer über den Träger einer Funktion aus $C_0^\infty(I)$ integriert wird.

Definition 4.3: (Bochner-Sobolev-Raum bezüglich Einbettung) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $J : X \to Y$ eine Einbettung, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann heißt

$$W_J^{1,p,q}(I,X,Y) := \left\{ \boldsymbol{x} \in L^p(I,X) \,\middle|\, \exists \frac{d_J\boldsymbol{x}}{dt} \in L^q(I,Y) \right\}$$

Bochner-Sobolev-Raum bezüglich J. Setze der Einfachheit halber $W^{1,p,q}(I,X) := W^{1,p,q}_{\mathrm{Id}_X}(I,X,X)$ und $W_J^{1,p}(I,X,Y) := W_J^{1,p,p}(I,X,Y)$.

Bemerkung 4.4: Mit Folgerung 3.4 gilt in Definition 4.1 für beliebiges $\varphi \in C_0^\infty(I)$, dass

$$J\left(-\int_I \boldsymbol{x}(s)\varphi\prime(s)ds\right) = -\int_I (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}\varphi\prime))(s)ds = -\int_I (\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})(s)\varphi\prime(s)ds \text{ in } Y.$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{J}$ den durch J induzierten Operator (cf. Folgerung 3.4). Daher sieht man leicht ein, dass für ein $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$ genau dann $\boldsymbol{x} \in W_J^{1,p,q}(I,X,Y)$ gilt, wenn $\boldsymbol{J}\boldsymbol{x} \in W^{1,p,q}(I,Y)$. Dann gilt insbesondere:

$$\frac{d_J\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}}{dt} \text{ in } L^q(I,Y).$$

Lemma 4.5: (Vollständigkeit) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $J : X \to Y$ eine Einbettung, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann ist $W_J^{1,p,q}(I,X,Y)$ versehen mit der Norm

$$\|\boldsymbol{x}\|_{W_J^{1,p,q}(I,X,Y)} := \|\boldsymbol{x}\|_{L^p(I,X)} + \left\| \frac{d_J \boldsymbol{x}}{dt} \right\|_{L^q(I,Y)}$$

ein Banachraum.

Beweis: Siehe [BF06, Lemma II.5.10]. ■

Lemma 4.6: (Linear-induzierte Operatoren zwischen Bochner-Sobolev-Räumen) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $A : X \to Y$ linear und stetig, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p, q < \infty$. Dann ist $\mathbf{A} : W^{1,p,q}(I,X) \to W^{1,p,q}(I,Y)$ mit $(\mathbf{A}\boldsymbol{x})(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ für fast alle $t \in I$ wohldefiniert, linear und stetig. Außerdem gilt für alle $\boldsymbol{x} \in W^{1,p,q}(I,X)$ die Identität:

$$\frac{d\mathbf{A}\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{A}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right) \text{ in } L^q(I,Y).$$

Ist $A : X \to Y$ ein Isomorphismus, dann auch $\mathbf{A} : W^{1,p,q}(I,X) \to W^{1,p,q}(I,Y)$.

Beweis: Für $\varphi \in C_0^\infty(I)$ gilt unter Anwendung von Folgerung 3.4 und Definition 4.1:

$$\begin{aligned} -\int_I (\mathbf{A}\boldsymbol{x})(s)\varphi\prime(s)ds &= A\left(-\int_I \boldsymbol{x}(s)\varphi\prime(s)ds\right) \\ &= A\left(\int_I \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(s)\varphi(s)ds\right) = \int_I \mathbf{A}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)(s)\varphi(s)ds \text{ in } Y, \end{aligned}$$

das heißt $\frac{d\mathbf{A}\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{A}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)$ in $L^q(I,Y)$. Also ist $\mathbf{A} : W^{1,p,q}(I,X) \to W^{1,p,q}(I,Y)$ wohldefiniert. Da sowohl $\mathbf{A} : L^p(I,X) \to L^p(I,Y)$ als auch $\mathbf{A} : L^q(I,X) \to L^q(I,Y)$ stetig sind (cf. Folgerung 3.4 und Bemerkung 3.5), folgt zusammen mit $\frac{d\mathbf{A}\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{A}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)$ in $L^q(I,Y)$ die Stetigkeit von $\mathbf{A} : W^{1,p,q}(I,X) \to W^{1,p,q}(I,Y)$. Die Linearität ist evident.

Ist nun A ein Isomorphismus, dann existiert $A^{-1} : Y \to X$, ist linear und stetig. Mit dem bereits Bewiesenen ist der Operator $\mathbf{B} : W^{1,p,q}(I,Y) \to W^{1,p,q}(I,X)$ mit $(\mathbf{B}\boldsymbol{y})(t) := A^{-1}\boldsymbol{y}(t)$ für fast alle $t \in I$ und $\boldsymbol{y} \in W^{1,p,q}(I,Y)$ linear und stetig. In Folgerung 3.4 wurde bereits gezeigt, dass $\mathbf{B}$ invers zu $\mathbf{A}$ ist. ■

Lemma 4.7: (Verallgemeinerter Volterra-Operator) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$. Dann ist der **verallgemeinerte Volterra-Operator**

$$\mathbf{V} : L^p(I,X) \to W^{1,p}(I,X) \text{ mit } (\mathbf{V}\boldsymbol{x})(t) := \int_0^t \boldsymbol{x}(s)ds \text{ für } t \in \overline{I}$$

wohldefiniert, linear und stetig. Außerdem gilt für alle $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$ die Identität:

$$\frac{d\mathbf{V}\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x} \text{ in } L^p(I,X).$$

Beweis: In [GGZ74, Kap. IV, Lemma 1.8] ist nachgewiesen, dass $\mathbf{V} : L^p(I,X) \to W^{1,p}(I,X)$ wohldefiniert ist und für $\boldsymbol{x} \in L^p(I,X)$

$$\frac{d\mathbf{V}\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x} \text{ in } L^p(I,X)$$

erfüllt. Für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L^p(I,X)$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{V}\boldsymbol{x} - \mathbf{V}\boldsymbol{y}\|_{W^{1,p}(I,X)} &= \|\mathbf{V}\boldsymbol{x} - \mathbf{V}\boldsymbol{y}\|_{L^p(I,X)} + \left\| \frac{d\mathbf{V}\boldsymbol{x}}{dt} - \frac{d\mathbf{V}\boldsymbol{y}}{dt} \right\|_{L^p(I,X)} \\
&= \left(\int_I \left\| \int_0^t \boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s) ds \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{L^p(I,X)} \\
&\leq \left(\int_I \left(\int_I \|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)\|_X \, ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{L^p(I,X)} \\
&= T^{\frac{1}{p}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{L^1(I,X)} + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{L^p(I,X)} \\
&\leq (1+T) \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{L^p(I,X)}
\end{aligned}$$

Schließlich ist $\mathbf{V} : L^p(I,X) \to W^{1,p}(I,X)$ stetig. Die Linearität ist evident. ■

Satz 4.8: (Hauptsatz für Bochner-Sobolev-Funktionen) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p, q < \infty$. Dann existiert genau eine Auswahlfunktion

$$(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_W) : W^{1,p,q}(I,X) \to C^0(\overline{I}, X) \text{ mit } \boldsymbol{x}_W \in \boldsymbol{x} \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in W^{1,p,q}(I,X),$$

die eine Einbettung definiert. Außerdem gilt für alle $t', t \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$:

$$\boldsymbol{x}_W(t) = \boldsymbol{x}_W(t') + \int_{t'}^t \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(s) ds \text{ in } X.$$

Beweis: Siehe [BF06, Lemma II.5.11]. ■

Bemerkung 4.9: Nach dem Hauptsatz für Bochner-Sobolev-Funktionen gilt die Mengengleichheit $W^{1,p,q}(I,X) = W^{1,q}(I,X)$. Die Interpolationsungleichung für das Lebesgue-Integral liefert schließlich auch Normäquivalenz, weshalb im Folgenden immer direkt $W^{1,q}(I,X)$ geschrieben wird.

Das folgende Resultat sichert die später für den Fixpunktsatz von Schauder und damit Existenz der Galerkin-Lösung notwendige Kompaktheit:

Folgerung 4.10: (Kompaktheit der Auswahlfunktion) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum mit $\dim X < \infty$, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < q < \infty$. Dann ist die Auswahlfunktion aus Satz 4.8 kompakt.

Beweis: Sei $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,q}(I,X)$ eine beschränkte Folge. Aufgrund der Einbettung in Satz 4.8 ist auch $((\boldsymbol{x}_n)_W(0))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ beschränkt. Wegen $\dim X < \infty$ und $1 < q < \infty$ sind X und $L^q(I,X)$ nach Satz 2.13 reflexiv. Der Satz von Eberlein-Šmulian (cf. Satz A.6) liefert nun eine

Teilfolge $(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,q}(I,X)$, sodass $\left(\frac{d\boldsymbol{x}_{\psi(n)}}{dt}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^q(I,X)$ schwach gegen $\tilde{\boldsymbol{x}} \in L^q(I,X)$ und $((\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W(0))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ stark gegen $x_0 \in X$ konvergiert. Definiere nun

$$\boldsymbol{x}(t) := x_0 + \int_0^t \tilde{\boldsymbol{x}}(s)ds \text{ in } X \text{ für } t \in I.$$

Mit Lemma 4.7 ist $\boldsymbol{x} \in W^{1,q}(I,X)$, also $(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W, \boldsymbol{x}_W \in C^0(\overline{I},X)$ nach Satz 4.8 und damit $\|(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W(\cdot) - \boldsymbol{x}_W(\cdot)\|_X \in C^0(\overline{I},\mathbb{R})$. Aufgrund der Kompaktheit von $\overline{I}$ existiert eine Folge von Maximalstellen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{I}$, die ohne Einschränkung stark konvergiert (Sonst geht man aufgrund der Kompaktheit von $\overline{I}$ erneut zu einer Teilfolge über), sodass gilt:

$$\|(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W - \boldsymbol{x}_W\|_{C^0(\overline{I},X)} = \max_{t\in\overline{I}} \|(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W(t) - \boldsymbol{x}_W(t)\|_X = \|(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W(t_n) - \boldsymbol{x}_W(t_n)\|_X.$$

Sei nun $x^* \in X^*$ beliebig. Dann ist $\left(x^* 1_{[0,t_n]}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^{q'}(I,X^*)$ stark konvergent. Unter Anwendung von Folgerung 3.4 und Beachtung der Darstellung der Dualität in Bochner-Lebesgue-Räumen (cf. Satz 2.14) folgt:

$$\begin{aligned}\left\langle x^*, \int_0^{t_n} \frac{d\boldsymbol{x}_{\psi(n)}}{dt}(s) - \tilde{\boldsymbol{x}}(s)ds \right\rangle_X &= \int_0^{t_n} \left\langle x^*, \frac{d\boldsymbol{x}_{\psi(n)}}{dt}(s) - \tilde{\boldsymbol{x}}(s) \right\rangle_X ds \\ &= \left\langle x^* 1_{[0,t_n]}, \frac{d\boldsymbol{x}_{\psi(n)}}{dt} - \tilde{\boldsymbol{x}} \right\rangle_{L^q(I,X)} \overset{n\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Die Integraldarstellung in Satz 4.8 zusammen mit der Konvergenz der Anfangswerte liefert dann:

$$(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W(t_n) - \boldsymbol{x}_W(t_n) = (\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W(0) - x_0 + \int_0^{t_n} \frac{d\boldsymbol{x}_{\psi(n)}}{dt}(s) - \tilde{\boldsymbol{x}}(s)ds \overset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ in } X$$

Wegen $\dim X < \infty$ impliziert dies sofort starke Konvergenz. Schließlich gilt:

$$\|(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W - \boldsymbol{x}_W\|_{C^0(\overline{I},X)} = \|(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W(t_n) - \boldsymbol{x}_W(t_n)\|_X \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Also besitzt jede beschränkte Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,q}(I,X)$ eine Teilfolge $(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $((\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(\overline{I},X)$ stark konvergiert, was die Kompaktheit der Auswahlfunktion impliziert, da diese nach Satz 4.8 bereits stetig ist. ■

Bemerkung 4.11: Sei wieder $\dim X < \infty$ und $1 < q < \infty$ beliebig. Folgerung 4.10 liefert zu jeder beschränkten Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,q}(I,X)$ eine stark konvergente Teilfolge $((\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(\overline{I},X)$. Da $(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_W \in \boldsymbol{x}_{\psi(n)}$ und $C^0(\overline{I},X) \hookrightarrow L^q(I,X)$ für alle $1 < q < \infty$ (cf. Satz 2.13 (ii)), konvergiert auch $(\boldsymbol{x}_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^q(I,X)$ stark. Also ist die Identitätsabbildung

$$\mathrm{Id}_{W^{1,q}(I,X)} : W^{1,q}(I,X) \to L^q(I,X) \text{ mit } \mathrm{Id}_{W^{1,q}(I,X)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \text{ in } L^q(I,X) \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in W^{1,q}(I,X)$$

ein kompakter Operator. Da $\mathrm{Id}_{W^{1,q}(I,X)}$ offensichtlich linear ist, liefert Lemma 2.3, dass dieser auch stark stetig ist.

5 Evolutionstripel

Definition 5.1: (Evolutionstripel) Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum und $j : V \to H$ eine Einbettung, sodass $R(j)$ dicht in H liegt. Dann heißt die Struktur (V, H, j) **Evolutionstripel**.

Lemma 5.2: (kanonische Einbettung) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $R : H \to H^*$ der Riesz-Isomorphismus auf H. Dann ist die Einschränkung von R bezüglich j gemäß Lemma 2.9 $e := R_j : V \to V^*$ eine Einbettung und es gilt:

$$\langle ev, w\rangle_V = (jv, jw)_H \text{ für alle } v, w \in V.$$

Bezeichne im Folgenden e als die **kanonische Einbettung** von (V, H, j).

Beweis: Aufgrund der Injektivität von R und $\overline{R(j)}^{\|\cdot\|_H} = H$, ist R_j gemäß Lemma 2.9 (ii) injektiv. Da R als linearer, stetiger Operator beschränkt ist, ist laut Lemma 2.9 (i) auch R_j beschränkt. Da R_j offensichtlich linear ist, impliziert dies bereits, dass R_j stetig ist, also eine Einbettung. Insbesondere gilt mit Lemma 2.9 für alle $v, w \in V$:

$$\langle ev, w\rangle_V = \langle R_j v, w\rangle_V = \langle Rjv, jw\rangle_H = (jv, jw)_H. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung 5.3: Es sei darauf hingewiesen, dass e für reflexives V eine dichte Einbettung definiert. Als Einbettung ist für e insbesondere die distributionelle Zeitableitung bezüglich e im Sinne von Definition 4.1 $\frac{d_e}{dt}$ wohldefiniert. Im Falle eines Evolutionstripels (V, H, j), $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p < \infty$ setze man daher gemäß Definition 2.12 und Definition 4.3

$$\mathbf{X} := L^p(I, V) \text{ und } \mathbf{W} := W_e^{1,p,p'}(I, V, V^*).$$

Außerdem bezeichnen $\mathbf{j} : \mathbf{X} \to L^p(I, H)$ und $\mathbf{e} : \mathbf{X} \to L^p(I, V^*)$ die durch j beziehungsweise e induzierten Operatoren. Eine alternative Charakterisierung der distributionellen Zeitableitung bezüglich e, die ihren Ursprung in der schwachen Formulierung instationärer Probleme findet, stellt das folgende Lemma dar:

Lemma 5.4: (Verallgemeinerte Zeitableitung) Ist (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p < \infty$. Dann gilt für $\boldsymbol{v} \in \mathbf{X}$, dass $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}$ genau dann, wenn ein $\tilde{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{X}^*$ existiert, sodass für eine dichte Teilmenge $M \subseteq V$ und alle $w \in M$, $\varphi \in C_0^\infty(I)$ gilt:

$$-\int_I ((\mathbf{j}\boldsymbol{v})(s), jw)_H \varphi\prime(s) ds = \int_I \langle \tilde{\boldsymbol{v}}(s), w\rangle_V \varphi(s) ds \tag{5.4.1}$$

Dann gilt insbesondere: $\frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{v}}$ in $\mathbf{X}^*$.

Beweis: Bezeichne $J_V : V \to V^{**}$ die kanonische Isometrie. Dann ist $\langle \cdot, w\rangle_V = \langle J_V w, \cdot\rangle_{V^*} \in V^{**}$ für beliebiges $w \in V$. Mit Folgerung 3.4 und Lemma 5.2 gilt dann

$$\int_I ((\mathbf{j}\boldsymbol{v})(s), jw)_H \varphi\prime(s) ds = \int_I \langle (\mathbf{e}\boldsymbol{v})(s), w\rangle_V \varphi\prime(s) ds = \left\langle e\left(\int_I \boldsymbol{v}(s)\varphi\prime(s) ds\right), w\right\rangle_V$$

$$\text{und } \int_I \langle \tilde{\boldsymbol{v}}(s), w\rangle_V \varphi(s) ds = \left\langle \int_I \tilde{\boldsymbol{v}}(s)\varphi(s) ds, w\right\rangle_V$$

Mit der Dichtheit von M in V gilt

$$e\left(-\int_I \boldsymbol{v}(s)\varphi\prime(s)ds\right) = \int_I \tilde{\boldsymbol{v}}(s)\varphi(s)ds \text{ in } V^* \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(I),$$

also $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}$ mit $\frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{v}}$ in $\mathbf{X}^*$ (cf. Definition 4.1) genau dann, wenn (5.4.1) erfüllt ist. ■

Bemerkung 5.5: Es sei darauf hingewiesen, dass die Identität (5.4.1) der Definition der verallgemeinerten Zeitableitung $d_t \boldsymbol{v}$ entspricht, wie beispielsweise in [SND16, Definition 4.22]. Da in dieser Arbeit allerdings verallgemeinerte Zeitableitungen zu verschiedenen Evolutionstripeln betrachtet werden, die jeweils äquivalent zur distributionellen Zeitableitung bezüglich der jeweiligen kanonischen Einbettung sind, wird immer auf Letztere Bezug genommen. Außerdem ist zu bemerken, dass sich (5.4.1) wegen

$$((\mathbf{j}\boldsymbol{y})(s), jw)_H \varphi\prime(s) = (j\boldsymbol{y}(s), jw)_H \varphi\prime(s) = (jw, j\boldsymbol{y}(s))_H \varphi\prime(s) = \langle \varphi\prime(s) e(w), \boldsymbol{y}(s)\rangle_V$$

für fast alle $s \in I$, $e(w)\varphi\prime \in C^0(\overline{I}, V^*) \hookrightarrow \mathbf{X}^*$ und der Darstellung der Dualität in Bochner-Lebesgue-Räumen (cf. Satz 2.14) auch durch

$$-\langle e(w)\varphi\prime, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}} = \langle \tilde{\boldsymbol{v}}, w\varphi\rangle_{\mathbf{X}} \text{ für alle } w \in M \text{ und } \varphi \in C_0^\infty(I)$$

ausdrücken lässt. Der Hauptsatz für verallgemeinerte Sobolevfunktionen (cf. Satz 4.8) liefert wieder die Existenz der Auswahlfunktion

$$(\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}_W) : W^{1,p'}(I, V^*) \to C^0(\overline{I}, V^*) \text{ mit } \boldsymbol{v}_W(t) = \boldsymbol{v}_W(t') + \int_{t'}^t \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(s)ds$$

sodass für ein $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}$ mit Bemerkung 4.4 Punktauswertung in V^* im Sinne des stetigen Repräsentanten $(\mathbf{e}\boldsymbol{v})_W \in C^0(\overline{I}, V^*)$ wohldefiniert ist. Diese lässt sich aufgrund der Evolutionstripel-Struktur verbessern. Dafür muss allerdings der Preis gezahlt werden, dass die handliche Integraldarstellung verloren geht:

Satz 5.6: (Verallgemeinerte partielle Integrationsformel und verbesserte Auswahlfunktion) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$ und $1 < p < \infty$. Dann existiert genau eine Auswahlfunktion

$$\mathbf{j}_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \to C^0(\overline{I}, H) \text{ mit } \mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{v} \in \mathbf{j}\boldsymbol{v} \text{ für alle } \boldsymbol{v} \in \mathbf{W}.$$

Diese ist eine Einbettung und es gilt die **verallgemeinerte partielle Integrationsformel**:

$$\left\langle \frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{w} 1_{[t',t]} \right\rangle_{\mathbf{X}} = [((\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{v})(s), (\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{w})(s))_H]_{s=t'}^{s=t} - \left\langle \frac{d_e \boldsymbol{w}}{dt}, \boldsymbol{v} 1_{[t',t]} \right\rangle_{\mathbf{X}}$$

für alle $t, t' \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$ und $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{W}$.

Beweis: Siehe [SND16, Kapitel 5, Theorem 5.15]. ■

Bemerkung 5.7: Für $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \in \mathbf{W}$ ergibt sich mit Satz 5.6 der Spezialfall:

$$\left\langle \frac{d_e \boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{v} 1_{[t',t]} \right\rangle_{\mathbf{X}} = \left[\frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{v})(s)\|_H^2\right]_{s=t'}^{s=t} \text{ für alle } t', t \in \overline{I} \text{ mit } t' \leq t.$$

6 Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Schließlich ist man in der Lage, nichtlineare Evolutionsgleichungen zu definieren:

Definition 6.1: (Evolutionsgleichung) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{y}_0 \in H$, $\boldsymbol{f} \in \mathbf{X}^*$ und $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ein Operator. Dann heißt eine Anfangswertaufgabe der Form

$$\begin{aligned} \frac{d_e \boldsymbol{y}}{dt} + \mathbf{A}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{f} \text{ in } \mathbf{X}^*, \\ (\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H. \end{aligned} \tag{1}$$

Evolutionsgleichung. Man bezeichnet sie als **nichtlineare Evolutionsgleichung**, falls $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ein nichtlinearer Operator ist.

Bemerkung 6.2: (Wohldefiniertheit) Eine Lösung von (1) muss in $\mathbf{W}$ liegen, um die erste Gleichung zu erfüllen. Dann ist wiederum die Punktauswertung gemäß der Auswahlfunktion $\mathbf{j}_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \to C^0(\overline{I}, H)$ wohldefiniert (cf. Satz 5.6).

Für Probleme des beschriebenen Modells möchten wir nun einen Existenzsatz formulieren und mit einem Galerkin-Ansatz beweisen. Zunächst soll die grundlegende Idee und das allgemeine Schema des verwendeten Galerkin-Ansatzes vorgestellt werden:

Allgemeiner Galerkin-Ansatz

Bemerkung 6.3: Im Allgemeinen weist der Bildbereich V nur wenig Struktur auf. Das soll heißen man fordert lediglich, dass V separabel und reflexiv ist. Die üblichen Existenzsätze für Differentialgleichungen sind dann aufgrund fehlender Kompaktheit im Bildbereich nicht anwendbar.

Die allgemeine Idee des Galerkin-Ansatzes besteht nun darin, eine Klasse von Unterräumen $\mathcal{U}$ von V zu betrachten, die V in einem gewissen Sinn approximieren und Eigenschaften aufweisen, die gerade so gewählt sind, sodass Existenzaussagen möglich sind, wenn man in (1) V durch $U \in \mathcal{U}$ ersetzt. Auf diese Weise erhält man eine Familie von Lösungen $(\boldsymbol{y}_U)_{U \in \mathcal{U}}$, die im Idealfall gleichmäßig beschränkt ist. Bei Reflexivität der zugrunde liegenden Räume führt dies zu relativer schwacher Kompaktheit der Lösungsfamilie, also zu schwach konvergenten Teilfolgen, welche die ursprünglich gesuchte Lösung von (1) approximieren sollen.

Im Folgenden wird geklärt, wie die angedeutete Approximation im Detail aussehen soll und welche Forderungen an die Unterräume $U \in \mathcal{U}$ zu stellen sind, sodass man letztendlich wieder eine wohldefinierte Anfangswertaufgabe im Sinne von Definition 6.1 erhält:

(i) Galerkin-Basis: Sei $\mathcal{U}$ ein System von Unterräumen $U \subseteq V$, sodass $(U, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum definiert und

$$\overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U}^{\|\cdot\|_V} = V$$

erfüllt. Bezeichne im Folgenden $\mathcal{U}$ als **Galerkin-Basis**.

(ii) Einschränkung der Evolutionstripel-Struktur: Da $\overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}$ ein abgeschlossener linearer Unterraum ist, definiert $(\overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}, (\cdot,\cdot)_H)$ einen Hilbertraum und U bettet bezüglich $j_{|U} : U \to \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}$ dicht in $\overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}$ ein. Also definiert $(U, \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}, j_{|U})$ gemäß Definition 5.1 ein Evolutionstripel und die zugehörige kanonische Einbettung $e_U : U \to U^*$ erfüllt gemäß Lemma 5.2

$$\langle e_U u, \tilde{u}\rangle_U = (ju, j\tilde{u})_H \text{ für alle } u, \tilde{u} \in U,$$

da auch $\overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}$ mit $(\cdot,\cdot)_H$ ausgestattet ist. Insbesondere ist dann $\langle e_U u, \tilde{u}\rangle_U = \langle eu, \tilde{u}\rangle_V$ für alle $u, \tilde{u} \in U$ (cf. Lemma 5.2).

(iii) Einschränkung der Räume: Da $e_U : U \to U^*$ eine Einbettung definiert, ist die distributionelle Zeitableitung bezüglich e_U im Sinne von Definition 4.1 $\frac{d_{e_U}}{dt}$ wohldefiniert und damit insbesondere die Räume

$$\mathbf{X}_U := L^p(I, U) \text{ und } \mathbf{W}_U := W^{1,p,p'}_{e_U}(I, U, U^*).$$

gemäß Definition 2.12 und Definition 4.3, ausgestattet mit ihren kanonischen Normen. Da U mit der $\|\cdot\|_V$-Norm versehen ist, ist auch $\mathbf{X}_U$ mit der $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$-Norm ausgestattet und damit $\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_U} : \mathbf{X}_U \to \mathbf{X}$ eine Isometrie, also insbesondere eine Einbettung. Die Evolutionstripel-Struktur $(U, \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}, j_{|U})$ liefert zusammen mit Satz 5.6 eine eindeutige Auswahlfunktion

$$\mathbf{j}_{\mathbf{W}_U} : \mathbf{W}_U \to C^0(\overline{I}, \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}) \subseteq C^0(\overline{I}, H) \text{ mit } \mathbf{j}_{\mathbf{W}_U}\boldsymbol{v} \in \mathbf{j}\boldsymbol{v}.$$

Insbesondere gilt die verallgemeinerte partielle Integrationsformel:

$$\left\langle \frac{d_{e_U}\boldsymbol{v}}{dt}, \tilde{\boldsymbol{v}} 1_{[t',t]} \right\rangle_{\mathbf{X}_U} = \left[((\mathbf{j}_{\mathbf{W}_U}\boldsymbol{v})(s), (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_U}\tilde{\boldsymbol{v}})(s))_H\right]_{s=t'}^{s=t} - \left\langle \frac{d_{e_U}\tilde{\boldsymbol{v}}}{dt}, \boldsymbol{v} 1_{[t',t]} \right\rangle_{\mathbf{X}_U}$$

für alle $t', t \in \overline{I}$ mit $t' \le t$ und $\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{W}_U$.

(iv) Einschränkung der Operatoren und rechten Seite: Da $\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_U} : \mathbf{X}_U \to \mathbf{X}$ eine Einbettung ist, sind $\mathbf{A}_U := \mathbf{A}_{\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_U}} : \mathbf{X}_U \to \mathbf{X}_U^*$ (cf. Lemma 2.9) und $\boldsymbol{f}_U := (\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_U})^* \boldsymbol{f} \in \mathbf{X}_U^*$ wohldefiniert und erfüllen

$$\langle \mathbf{A}_U \boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}}\rangle_{\mathbf{X}_U} = \langle \mathbf{A}\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}}\rangle_{\mathbf{X}} \text{ und } \langle \boldsymbol{f}_U, \tilde{\boldsymbol{u}}\rangle_{\mathbf{X}_U} = \langle \boldsymbol{f}, \tilde{\boldsymbol{u}}\rangle_{\mathbf{X}} \text{ für alle } \boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{X}_U.$$

(v) Galerkin-System: Schließlich ergibt sich für $\boldsymbol{y}_0^U \in \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}$ die Wohldefiniertheit der Anfangswertaufgabe: Suche $\boldsymbol{y}_U \in \mathbf{W}_U$, sodass

$$\begin{aligned} &\frac{d_{e_U}\boldsymbol{y}_U}{dt} + \mathbf{A}_U\boldsymbol{y}_U = \boldsymbol{f}_U \text{ in } \mathbf{X}_U^* \\ &\text{und } (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_U}\boldsymbol{y}_U)(0) = \boldsymbol{y}_0^U \text{ in } \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}. \end{aligned}$$

Gemäß Definition 6.1 entspricht diese einer Evolutionsgleichung. Man bezeichne dieses System von Evolutionsgleichungen als **Galerkin-System bezüglich** $(\boldsymbol{y}_0^U, U)_{U\in\mathcal{U}}$.

Als erstes soll dieses Schema auf eine nichtlineare Evolutionsgleichung mit separablem Bildbereich angewendet werden, da dort leicht eine geeignete Galerkin-Basis konstruiert werden kann:

Existenzsatz mit separablem V

Satz 6.4: Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, V separabel und reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $p' := \frac{p}{p-1}$, $\mathbf{X} := L^p(I, V)$ und $\mathbf{W} := W_e^{1,p,p'}(I, V, V^*)$. Des Weiteren gelte:

1. $\mathbf{A}_0 : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ist monoton.
2. $\mathbf{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ist beschränkt.
3. $\mathbf{A} := \mathbf{A}_0 + \mathbf{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ist koerziv und genügt der Bedingung (M).

Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in H$ und $\boldsymbol{f} \in \mathbf{X}^*$ eine Lösung $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ von (1).

Beweis: Es reicht die Behauptung für $\boldsymbol{f} = 0$ in $\mathbf{X}^*$ zu zeigen. Sonst betrachtet man einfach $\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A} - \boldsymbol{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ und $\widetilde{\mathbf{A}}$ ist wegen

$$\langle \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}} \geq \langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}} - \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{X}^*}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}}.$$

wieder koerziv und genügt weiterhin der Bedingung (M), da diese invariant unter stark stetigen Störungen ist (cf. Lemma 2.8 (ii)) und konstante Operatoren trivialerweise stark stetig sind. Außerdem bleibt $\mathbf{B} - \boldsymbol{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ beschränkt.

1. Galerkin-Ansatz: Der Beweis wird mit dem Galerkin-Ansatz gemäß Bemerkung 6.3 geführt. Als Galerkin-Basis soll eine Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq V,\ \dim V_n < \infty \text{ und } \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n}^{\|\cdot\|_V} = V.$$

dienen. Diese gilt es allerdings erst geeignet zu konstruieren.

1.1. Konstruktion der Galerkin-Basis: Für $\dim V < \infty$ setze man $V_n = V$ und $a_n = j^{-1}\boldsymbol{y}_0$. Sonst gilt: Da V separabel ist und $\overline{R(j)}^{\|\cdot\|_H} = H$, existiert eine abzählbare Menge $M \subseteq V$, sodass

$$\overline{\langle M\rangle}^{\|\cdot\|_V} = V \text{ und } \overline{\langle j(M)\rangle}^{\|\cdot\|_H} = H.$$

Das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren (cf. Lemma A.3) angewendet auf $j(M)$ liefert nun $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq H$, die ein vollständiges Orthonormalsystem in H bilden und $\langle h_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle = \langle j(M)\rangle$ erfüllen. Da $j : \langle M\rangle \to \langle j(M)\rangle$ linear und bijektiv ist, existiert $j^{-1} : \langle j(M)\rangle \to \langle M\rangle$ und ist wieder linear. Für $v_i := j^{-1}h_i$ $(i \in \mathbb{N})$ gilt dann aufgrund der Linearität von j^{-1}, dass

$$\langle v_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle = j^{-1}(\langle h_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle) = j^{-1}(\langle j(M)\rangle) = \langle M\rangle.$$

Für $V_n := \langle v_1, ..., v_n\rangle$ gilt dann offensichtlich $\langle M\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Also erfüllt $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaften der gewünschten Galerkin-Basis.

Jedes V_n versehen mit $\|\cdot\|_V$ definiert einen Banachraum. Um das Galerkin-System bezüglich $(\boldsymbol{y}_0, V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Bemerkung 6.3 (v) betrachten zu können, müsste $\boldsymbol{y}_0 \in \overline{j(V_n)}^{\|\cdot\|_H} = j(V_n)$ sein, also mindestens $\boldsymbol{y}_0 \in R(j)$. Wir wollen die Aussage jedoch für beliebiges $\boldsymbol{y}_0 \in H$ beweisen. Da $R(j)$ dicht in H ist, liegt es nahe, den Anfangswert durch eine Folge aus $R(j)$ zu approximieren:

1.2 Approximation des Anfangswerts: Da $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H definiert, betrachte man gemäß Lemma A.4 für $H_n := j(V_n) = \langle h_i \mid i = 1, ..., n\rangle$ den **n-ten Projektionsoperator** $P_n : H \to H_n$ mit

$$P_n(h) := \sum_{i=1}^{n} (h_i, h)_H h_i \text{ für } h \in H.$$

Dann gilt für $a_n := \sum_{i=1}^{n} (h_i, \boldsymbol{y}_0)_H v_i \in V_n$, dass $ja_n = P_n(\boldsymbol{y}_0)$ als verallgemeinerte Fourier-Reihe stark gegen $\boldsymbol{y}_0$ in H konvergiert und die Ungleichung $\|ja_n\|_H = \|P_n(\boldsymbol{y}_0)\|_H \leq \|\boldsymbol{y}_0\|_H$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt (cf. Lemma A.4).

1.3 Galerkin-System: Gemäß Bemerkung 6.3 (v) ergibt sich die Wohldefiniertheit des Galerkin-Systems bezüglich $(ja_n, V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann soll $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{W}_{V_n}$ **n-te Galerkinlösung** heißen, falls gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d_{e_{V_n}} \boldsymbol{y}_n}{dt} + \mathbf{A}_{V_n} \boldsymbol{y}_n &= 0 \text{ in } \mathbf{X}^*_{V_n} \\ (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}} \boldsymbol{y}_n)(0) &= ja_n \text{ in } j(V_n), \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei bezeichnet $e_{V_n} : V_n \to V_n^*$ die kanonische Einbettung zum Evolutionstripel $(V_n, \overline{j(V_n)}^{\|\cdot\|_H}, j_{|V_n})$ (cf. Bemerkung 6.3 (ii)) und $\mathbf{A}_{V_n}$ die Einschränkung von $\mathbf{A}$ bezüglich $\mathbf{Id}_{\mathbf{X}_{V_n}}$ (cf. Bemerkung 6.3 (iv)). Die Räume $\mathbf{X}_{V_n}$, $\mathbf{W}_{V_n}$, die Ableitung $\frac{d_{e_{V_n}}}{dt}$ und die Auswahlfunktion $\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}}$ sind auch wie in Bemerkung 6.3 (iii) zu verstehen.

2. Existenz der Galerkinlösungen: Ziel ist es nun (2) äquivalent durch ein Fixpunktproblem darzustellen. Dabei geht man im Wesentlichen analog zum Beweis des Satzes von Peano (cf. [Růž04, Satz 2.55]) vor und verwendet den auch für Bochner-Sobolev-Funktionen geltenden Hauptsatz (cf. Satz 4.8), um (2) durch Integration in die übliche äquivalente Integraldarstellung zu überführen. Diese definiert wiederum einen Operator, auf den eine Version des Fixpunktsatzes von Schauder angewendet werden soll. Dabei tritt ein entscheidendes Problem auf:

Durch Integration von (2) erhält man eine Identität mit Werten in V_n^*. Die gesuchte Galerkin-Lösung soll aber Werte in V_n annehmen und ist daher als Fixpunkt nicht wohldefiniert. Die Lösung wird sein, dass die kanonische Einbettung eines endlichdimensionalen Evolutionstripels einen Isomorphismus definiert und unter Zuhilfenahme von Lemma 4.6 die Anfangswertaufgabe (2) äquivalent in eine Operatordifferentialgleichung mit Werten in V_n überführt werden kann.

2.1 Äquivalente Operatordifferentialgleichung: Wegen $\dim V_n < \infty$ sind V_n und V_n^* isomorph. Die Injektivität der kanonischen Einbettung $e_{V_n} : V_n \to V_n^*$ gemäß Lemma 5.2 liefert dann auch Surjektivität, sodass $e_{V_n}^{-1} : V_n^* \to V_n$ existiert und linear ist. Da lineare Operatoren im Endlichdimensionalen immer stetig sind, besitzt schließlich e_{V_n} eine stetige Inverse und ist daher ein Isomorphismus. Folgerung 3.4 sichert nun, dass der induzierte Operator $\mathbf{e}_n : L^{p'}(I, V_n) \to \mathbf{X}^*_{V_n}$ wohldefiniert und ein Isomorphismus ist. Lemma 4.6 liefert darüber hinaus, dass

$$\mathbf{e}_n : W^{1,p'}(I, V_n) \to W^{1,p'}(I, V_n^*) \text{ mit } \frac{d\mathbf{e}_n \boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{e}_n \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) \text{ in } L^{p'}(I, V_n^*).$$

immer noch wohldefiniert und ein Isomorphismus ist. Dabei ist die Ableitung $\frac{d}{dt}$ jeweils bezüglich $\mathrm{Id}_{V_n^*}$ beziehungsweise Id_{V_n} zu verstehen (cf. Definition 4.1). Da für eine Lösung $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{W}_{V_n}$ von (2) gilt, dass $\mathbf{e}_n \boldsymbol{y}_n \in W^{1,p'}(I, V_n^*)$ mit $\frac{d_{e_{V_n}} \boldsymbol{y}_n}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_n \boldsymbol{y}_n}{dt}$ in $L^{p'}(I, V_n^*)$ (cf. Bemerkung 4.4), ist

bereits $\boldsymbol{y}_n = \mathbf{e}_n^{-1}\mathbf{e}_n\boldsymbol{y}_n \in W^{1,p'}(I,V_n)$. Gemäß Satz 4.8 existiert eine eindeutige Auswahlfunktion

$$(\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}_W) : W^{1,p'}(I,V_n) \to C^0(\overline{I},V_n) \text{ mit } \boldsymbol{v}_W \in \boldsymbol{v},$$

die nun Punktauswertung im Sinne des stetigen Repräsentanten für die Lösung $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{W}_{V_n}$ von (2) rechtfertigt. Wegen der Invertierbarkeit von $\mathbf{e}_n : L^{p'}(I,V_n) \to \mathbf{X}_{V_n}^*$ und

$$\frac{d_{e_{V_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_n\boldsymbol{y}_n}{dt} = \mathbf{e}_n\left(\frac{d\boldsymbol{y}_n}{dt}\right) \text{ in } \mathbf{X}_{V_n}^*,$$

ist $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{W}_{V_n}$ genau dann Lösung von (2), wenn $\boldsymbol{y}_n \in W^{1,p'}(I,V_n)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{y}_n}{dt} &= -\mathbf{e}_n^{-1}\mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{y}_n \text{ in } L^{p'}(I,V_n) \\ \text{und } (\boldsymbol{y}_n)_W(0) &= a_n \text{ in } V_n. \end{aligned} \tag{3}$$

2.2 Äquivalente Integraldarstellung und Fixpunktoperator: Lemma 4.7 sichert nun die Wohldefiniertheit von $\mathbf{T}_n : \mathbf{X}_{V_n} \to W^{1,p'}(I,V_n)$ mit

$$(\mathbf{T}_n\boldsymbol{v})(t) := a_n - (\mathbf{V}\mathbf{e}_n^{-1}\mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{v})(t) = a_n - \int_0^t (\mathbf{e}_n^{-1}\mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{v})(s)ds \text{ in } V_n \text{ für alle } t \in \overline{I}$$

und zusammen mit dem Hauptsatz für Bochner-Sobolev-Funktionen (cf. Satz 4.8) analog zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen die Äquivalenz von (3) und der Existenz eines Fixpunktes von $\mathbf{T}_n : \mathbf{X}_{V_n} \to \mathbf{X}_{V_n}$.

2.3 Existenz eines Fixpunkts von $\mathbf{T}_n$: Wie bereits angedeutet, wird die Existenz eines Fixpunktes mit einer Version des Fixpunktsatzes von Schauder bewiesen:

Satz: (Schauder) *Sei $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ ein Banachraum und $\mathcal{T} : \mathcal{M} \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{M}$ stetig, wobei $\emptyset \neq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ konvex und kompakt ist. Dann existiert ein $x \in \mathcal{M}$, sodass*

$$\mathcal{T}x = x \text{ in } \mathcal{X}.$$

Beweis: *Siehe [Růž04, Kapitel 1, Satz 2.46].* ■

Ziel ist es nun die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Schauder nachzuweisen:

(i) Stetigkeit von $\mathbf{T}_n$: Da $\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_{V_n}} : \mathbf{X}_{V_n} \to \mathbf{X}$ eine Einbettung definiert, ist $\mathbf{A}_{V_n} : \mathbf{X}_{V_n} \to \mathbf{X}_{V_n}^*$ nach Lemma 2.9 (v) demistetig. Lemma 4.7 liefert, dass der Volterra-Operator $\mathbf{V} : L^{p'}(I,V_n) \to W^{1,p'}(I,V_n)$ linear und stetig ist. Da $\mathbf{e}_n^{-1} : \mathbf{X}_{V_n}^* \to L^{p'}(I,V_n)$ ebenfalls linear und stetig ist (cf. Folgerung 3.4), bleibt auch $\mathbf{V}\mathbf{e}_n^{-1} : \mathbf{X}_{V_n}^* \to W^{1,p'}(I,V_n)$ linear und stetig, also schwach stetig. Lemma 2.2 (i) liefert jetzt, dass $\mathbf{T}_n = a_n - \mathbf{V}\mathbf{e}_n^{-1}\mathbf{A}_{V_n} : \mathbf{X}_{V_n} \to W^{1,p'}(I,V_n)$ demistetig ist. Mit $\dim V_n < \infty$, $1 < p' < \infty$ und Folgerung 4.10, Satz 2.13 (ii) und Lemma 2.3 ist

$$\mathrm{Id}_{W^{1,p'}(I,V_n)} : W^{1,p'}(I,V_n) \to \mathbf{X}_{V_n}$$

ein stark stetiger Operator. Mit Lemma 2.2 (ii) ist schließlich $\mathbf{T}_n = \mathrm{Id}_{W^{1,p'}(I,V_n)}\mathbf{T}_n : \mathbf{X}_{V_n} \to \mathbf{X}_{V_n}$ stetig.

(ii) Selbstabbildungseigenschaft von $\mathbf{T}_n$: Da $\mathbf{T}_n$ nur stetig ist, also nicht einmal notwendigerweise beschränkt, erfüllt $\mathbf{T}_n$ die geforderte Selbstabbildungseigenschaft im Allgemeinen nicht.

Die Idee ist nun den Operator $\mathbf{T}_n$ zu einem Operator $\widetilde{\mathbf{T}}_n$ zu stauchen, der die Selbstabbildungseigenschaft erfüllt und dessen Fixpunktmenge mit der von $\mathbf{T}_n$ identisch ist. Dann reicht es für (2) die Existenz eines Fixpunkts von $\widetilde{\mathbf{T}}_n$ zu zeigen.

(iii) Äquivalentes Fixpunktproblem mit gestauchtem Operator $\widetilde{\mathbf{T}}_n$: Um die Gestalt des Operators $\widetilde{\mathbf{T}}_n$ bestimmen zu können, benötigt man A-priori-Abschätzungen für die Fixpunktprobleme von $\widetilde{\mathbf{T}}_n$ und $\mathbf{T}_n$. Da man den Stauchungsfaktor a priori nicht angeben kann, betrachtet man einfach $\tau\mathbf{T}_n$ für $0 < \tau \leq 1$ und bestimmt A-priori-Abschätzungen für diese Homotopie. Erhält man dann von $0 < \tau \leq 1$ unabhängige A-priori-Abschätzungen, dann gelten diese auch für $\widetilde{\mathbf{T}}_n$ und $\mathbf{T}_n$, da man annehmen kann, dass der Stauchungsfaktor auch in $(0, 1]$ liegen wird. Sonst ist $\widetilde{\mathbf{T}}_n$ keine Stauchung, sondern eine Streckung von $\mathbf{T}_n$ und würde die Selbstabbildungseigenschaft wieder nicht erfüllen.

(a) A-priori-Abschätzungen der Homotopie: Sei nun $0 < \tau \leq 1$ beliebig. Angenommen es existiere ein $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{X}_{V_n}$, sodass $\boldsymbol{y}_n = \tau\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n$ in $\mathbf{X}_{V_n}$, das heißt

$$\begin{aligned} \frac{d_{e_{V_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt} + \tau\mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{y}_n &= 0 \text{ in } \mathbf{X}_{V_n}^* \\ (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}}\boldsymbol{y}_n)(0) &= \tau j a_n \text{ in } j(V_n). \end{aligned}$$

Testen mit $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{W}_{V_n}$ liefert dann unter Verwendung der Identität $\langle \mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}}\rangle_{\mathbf{X}_{V_n}} = \langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}}\rangle_{\mathbf{X}}$ für alle $\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{X}_{V_n}$ (cf. Bemerkung 6.3 (iv)) und der in $\mathbf{W}_{V_n}$ geltenden verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Bemerkung 6.3 (iii)), dass

$$\begin{aligned} \tau\langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}} = \tau\langle \mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}_{V_n}} &= -\left\langle \frac{d_{e_{V_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt}, \boldsymbol{y}_n \right\rangle_{\mathbf{X}_{V_n}} \\ &= -\frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 + \frac{\tau^2}{2}\|j a_n\|_H^2. \end{aligned}$$

Mit $\|j a_n\|_H \leq \|\boldsymbol{y}_0\|_H$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (cf. (1.2)) gilt:

$$\frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 + \tau\langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}} \leq \frac{\tau^2}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \tag{$\square$}$$

Da $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ koerziv ist, also $\lim_{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}}\to\infty} \frac{\langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}}}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}}} = \infty$, existiert ein $R > 0$, sodass für $\boldsymbol{v} \in \mathbf{X}$ gilt:

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}} \geq R \Rightarrow \frac{\langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}}}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}}} \geq 1.$$

Sonst müsste es eine Folge $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{X}$ geben, die $\|\boldsymbol{v}_n\|_{\mathbf{X}} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ und $\frac{\langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n\rangle_{\mathbf{X}}}{\|\boldsymbol{v}_n\|_{\mathbf{X}}} < 1$ erfüllt, im Widerspruch zur Koerzivität.
Definiere nun $M := \max\left\{R, \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2\right\}$. Angenommen $\|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} > M \geq R$. Dann gilt mit der obigen Überlegung, dass $\langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}} \geq \|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}}$. Setzt man dies in ($\square$) ein, so erhält man

$$\frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 + \tau\|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{\tau^2}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \leq \tau^2 M,$$

das heißt $\|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} \leq \tau M \leq M$, da $0 < \tau \leq 1$, im Widerspruch zur Annahme. Also muss $\|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} \leq M$ sein. Insbesondere folgt aus (□), dass

$$\langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}} \leq \frac{\tau}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \leq M.$$

Lemma 2.6 liefert nun für $h \equiv 1$ und $S = (\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{X}$ ein nur von $M > 0$ und $\mathbf{A}$ abhängiges $M' > 0$, sodass

$$\|\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}^*} \leq M'.$$

Mit $\langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}} \geq -\|\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}^*}\|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} \geq -M'M$ folgt dann aus (□), dass

$$\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 \leq 2\tau M(\tau + M') \leq 2M(1 + M').$$

(b) Konstruktion des gestauchten Operators $\widetilde{\mathbf{T}}_n$: Die Demistetigkeit von $\mathbf{A}_{V_n}$, die Identität $\langle \mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}_{V_n}} = \langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}}$ für alle $\boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_{V_n}$ (cf. Bemerkung 6.3 (iv)) und die Einbettung $\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_{V_n}} : \mathbf{X}_{V_n} \to \mathbf{X}$ (cf. Bemerkung 6.3 (iii)) sichern, dass die Operatoren

$$(\boldsymbol{v} \mapsto |\langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}}|), (\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}}) : \mathbf{X}_{V_n} \to \mathbb{R}$$

stetig sind. Mit Lemma A.2 folgt dann die Stetigkeit der **Stauchungsoperatoren** $g, h : \mathbf{X}_{V_n} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(\boldsymbol{v}) := \begin{cases} 1, \text{ falls } \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}} \leq 2M \\ \frac{2M}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}}}, \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad h(\boldsymbol{v}) := \begin{cases} 1, \text{ falls } |\langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}}| \leq MM' \\ \frac{MM'}{|\langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}}|}, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Schließlich ist der **gestauchte Operator** $\widetilde{\mathbf{T}}_n := g\left(h \cdot \mathbf{T}_n\right) h \cdot \mathbf{T}_n : \mathbf{X}_{V_n} \to \mathbf{X}_{V_n}$ als Produkt und Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig.

(c) Äquivalenz der Fixpunktprobleme: Wegen $0 < g\left(h \cdot \mathbf{T}_n\right) h \leq 1$ gelten für $\tau = g(h(\boldsymbol{y}_n)\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n)h(\boldsymbol{y}_n)$ in (2.3) (iii) (a) die A-priori-Abschätzungen der Homotopie, das heißt sowohl für Fixpunkte $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{X}_{V_n}$ von $\widetilde{\mathbf{T}}_n$ als auch von $\mathbf{T}_n$ erhält man:

$$\|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} \leq M \text{ und } \|\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}^*} \leq M',$$

Dies impliziert $|\langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}}| \leq MM'$ und liefert daher $h(\boldsymbol{y}_n) = 1$ (cf. (2.3) (iii) (b)). Ist nun $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{X}_{V_n}$ ein Fixpunkt von $\mathbf{T}_n$, dann gilt mit $h(\boldsymbol{y}_n) = 1$, $\|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} \leq M < 2M$ und der Definition von g:

$$g(h(\boldsymbol{y}_n)\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n) = g(\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n) = g(\boldsymbol{y}_n) = 1.$$

Das ergibt schließlich $\widetilde{\mathbf{T}}_n\boldsymbol{y}_n = g(h(\boldsymbol{y}_n)\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n)h(\boldsymbol{y}_n)\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n = \mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y}_n$ in $\mathbf{X}_{V_n}$.
Ist dagegen $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{X}_{V_n}$ ein Fixpunkt von $\widetilde{\mathbf{T}}_n$, dann muss auch schon $g(h(\boldsymbol{y}_n)\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n) = 1$ gelten. Denn sonst müsste $\|h(\boldsymbol{y}_n)\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} > 2M$ sein, was mit $h(\boldsymbol{y}_n) = 1$

$$M \geq \|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} = \|g\left(\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n\right)\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} = \frac{2M}{\|\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}}}\|\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} = 2M > M,$$

ergäbe, ein Widerspruch. Also gilt $\mathbf{T}_n\boldsymbol{y}_n = \widetilde{\mathbf{T}}_n\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y}_n$ in $\mathbf{X}_{V_n}$.

(d) Existenz eines Fixpunkts für $\widetilde{\mathbf{T}}_n$: Für beliebiges $\boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_{V_n}$ gilt:

$$\triangleright \quad \|\widetilde{\mathbf{T}}_n \boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}} = \left\{ \begin{array}{ll} \|h(\boldsymbol{v})\mathbf{T}_n\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}} & , \text{falls } \|h(\boldsymbol{v})\mathbf{T}_n\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}} \leq 2M \\ \frac{2M}{\|h(\boldsymbol{v})\mathbf{T}_n\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}}} \|h(\boldsymbol{v})\mathbf{T}_n\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}} & , \text{falls } \|h(\boldsymbol{v})\mathbf{T}_n\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}} > 2M \end{array} \right\} \leq 2M.$$

$$\begin{aligned} \triangleright \quad \left\| \frac{d\widetilde{\mathbf{T}}_n \boldsymbol{v}}{dt} \right\|_{L^{p'}(I,V_n)} &= \left\| \frac{d}{dt} \left(g\left(h(\boldsymbol{v})\mathbf{T}_n\boldsymbol{v}\right) h(\boldsymbol{v}) \mathbf{V}\mathbf{e}_n^{-1}\mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{v} \right) \right\|_{L^{p'}(I,V_n)} \\ &= \left\| g\left(h(\boldsymbol{v})\mathbf{T}_n\boldsymbol{v}\right) h(\boldsymbol{v}) \frac{d}{dt} \left(\mathbf{V}\mathbf{e}_n^{-1}\mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{v} \right) \right\|_{L^{p'}(I,V_n)} \\ &\leq \|h(\boldsymbol{v})\mathbf{e}_n^{-1}\mathbf{A}_{V_n}\boldsymbol{v}\|_{L^{p'}(I,V_n)} \\ &= \left\|h(\boldsymbol{v})\mathbf{e}_n^{-1}(\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_{V_n}})^*\mathbf{A}(\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_{V_n}})\boldsymbol{v}\right\|_{L^{p'}(I,V_n)} \\ &\leq \|\mathbf{e}_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_{V_n}^*, L^{p'}(I,V_n))} \|(\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_{V_n}})^* h(\boldsymbol{v})\mathbf{A}\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}_{V_n}^*} \\ &\leq \|\mathbf{e}_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_{V_n}^*, L^{p'}(I,V_n))} \|(\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_{V_n}})^*\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}_{V_n}^*)} \|h(\boldsymbol{v})\mathbf{A}\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}^*} \\ &\leq \|\mathbf{e}_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_{V_n}^*, L^{p'}(I,V_n))} \|h(\boldsymbol{v})\mathbf{A}\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}^*}. \end{aligned}$$

Dabei wurde für die Ableitung im zweiten Gleichheitszeichen verwendet, dass für festes $\boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_{V_n}$ durch $g\left(h(\boldsymbol{v})\mathbf{T}_n\boldsymbol{v}\right) h(\boldsymbol{v})$ eine reelle Konstante gegeben ist. In der ersten Abschätzung wurde ausgenutzt, dass $|g(h \cdot \mathbf{T}_n)| \leq 1$ und $\frac{d\mathbf{V}\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v}$ in $L^{p'}(I, V_n)$ (cf. Lemma 4.7). Die folgende Identität und Abschätzung ergeben sich mit der Definition von $\mathbf{A}_{V_n}$ (cf. Bemerkung 6.3 (iv)) und $\|(\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_{V_n}})^*\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}_{V_n}^*)} = \|\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_{V_n}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_{V_n}, \mathbf{X})} \leq 1$.

Für alle $\boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_{V_n}$ gilt $h(\boldsymbol{v})\langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}} \leq MM'$. Lemma 2.6 liefert nun für $S = B_{2M}^{\mathbf{X}_{V_n}}$ ein $K > 0$, sodass

$$\|h(\boldsymbol{v})\mathbf{A}\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}^*} \leq K \text{ für alle } \boldsymbol{v} \in B_{2M}^{\mathbf{X}_{V_n}}.$$

Das heißt für alle $\boldsymbol{v} \in B_{2M}^{\mathbf{X}_{V_n}}$ ist $\left\| \frac{d\widetilde{\mathbf{T}}_n \boldsymbol{v}}{dt} \right\|_{L^{p'}(I,V_n)} \leq \|\mathbf{e}_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_{V_n}^*, L^{p'}(I,V_n))} K$. Definiere nun

$$\mathbf{B}_n := \left\{ \boldsymbol{v} \in W^{1,p'}(I, V_n) \cap B_{2M}^{\mathbf{X}_{V_n}} \,\middle|\, \left\| \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right\|_{L^{p'}(I,V_n)} \leq \|\mathbf{e}_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_{V_n}^*, L^{p'}(I,V_n))} K \right\}$$

und $\mathbf{K}_n := \overline{\mathbf{Id}_{W^{1,p'}(I,V_n)}(\mathbf{B}_n)}^{\|\cdot\|_{\mathbf{X}}}$.

Dann ist $\widetilde{\mathbf{T}}_n : \mathbf{K}_n \subseteq \mathbf{X}_{V_n} \to \mathbf{K}_n$ wohldefiniert und stetig. Nach Bemerkung 4.9 ist $\mathbf{B}_n$ nichtleer, beschränkt und konvex in $W^{1,p'}(I, V_n)$. Da

$$\mathbf{Id}_{W^{1,p'}(I,V_n)} : W^{1,p'}(I, V_n) \to \mathbf{X}_{V_n}$$

kompakt ist (cf. Folgerung 4.10 und Satz 2.13 (ii)), ist $\mathbf{Id}_{W^{1,p'}(I,V_n)}(\mathbf{B}_n)$ nichtleer, konvex und relativ kompakt, also $\mathbf{K}_n$ nichtleer, konvex und kompakt in $\mathbf{X}_{V_n}$, denn der Abschluss konvexer Mengen ist wieder konvex. Der Fixpunktsatz von Schauder liefert nun den gesuchten Fixpunkt von $\widetilde{\mathbf{T}}_n$. Nach (2.3) (iii) (c) ist dieser auch ein Fixpunkt von $\mathbf{T}_n$ und mit (2.2) und (2.1) auch Lösung von (3) und (2).

3. Grenzübergang: Nachdem die Existenz der Galerkin-Lösungen gezeigt ist, gilt es mit Hilfe dieser, die gesuchte Lösung von (1) zu konstruieren:

3.1 Konvergenz der Galerkinlösungen: Nach (2.3) (iii) (a) für $\tau = 1$ gilt

$$\|\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}} \leq M, \|\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n\|_{\mathbf{X}^*} \leq M' \text{ und } \|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}} \boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 \leq 2M(1+M'),$$

wobei $M, M' > 0$ nur von $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{y}_0$ abhängen, also unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ sind. Das heißt die Folgen $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{X}$, $(\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{X}^*$ und $((\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}} \boldsymbol{y}_n)(T))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ sind beschränkt. Da $\mathbf{X}$ für $1 < p < \infty$ und reflexives V selbst reflexiv ist (cf. Satz 2.13 (iv)), ist auch $\mathbf{X}^*$ reflexiv. H ist als Hilbertraum ebenfalls reflexiv, sodass man nun mit dem Satz von Eberlein-Šmulian (cf. Satz A.6) eine Teilfolge, die wieder mit $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet werden soll, und Elemente $\boldsymbol{y} \in \mathbf{X}$, $\boldsymbol{y}_T \in H$ und $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{X}^*$ erhält, sodass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y} \text{ in } \mathbf{X}, \\ \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\xi} \text{ in } \mathbf{X}^*, \\ \text{und } (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}} \boldsymbol{y}_n)(T) &\overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \boldsymbol{y}_T \text{ in } H. \end{aligned}$$

Nun befindet man sich in der Situation einer schwach konvergenten Folge $(\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und möchte, dass auch $\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{A}\boldsymbol{y}$ in $\mathbf{X}^*$ gilt. Dies gilt für nichtlineare Operatoren im Allgemeinen nicht. Die Bilder $(\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren zwar schwach, aber der Grenzwert $\boldsymbol{\xi}$ kann zunächst nicht als $\mathbf{A}\boldsymbol{y}$ identifiziert werden, und damit $\boldsymbol{y}$ nicht direkt im Grenzübergang als Lösung von (1). Hier greift nun die Bedingung (M):

Die schwache Konvergenz der Bilder $(\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Randwerte $((\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}} \boldsymbol{y}_n)(T))_{n\in\mathbb{N}}$ ermöglichen zumindest, dass ein Grenzübergang überhaupt ausgeführt werden kann. Durch diesen Grenzübergang gegen einen bis dahin nicht mit $\mathbf{A}\boldsymbol{y}$ identifizierten Grenzwert gelingt es allerdings, Informationen über $\boldsymbol{y}$ zu sammeln, die dazu verwendet werden können, um die in der Bedingung (M) geforderte Limsup-Abschätzung nachzuweisen (cf. Definition 2.7) und schließlich $\boldsymbol{\xi}$ und $\mathbf{A}\boldsymbol{y}$ miteinander zu identifizieren.

3.2 Regularität und Randwerte des schwachen Grenzwerts: Sei nun $v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ beliebig. Wegen $V_n \subseteq V_{n+1}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $v \in V_n$ für alle $n \geq n_0$. Für $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ ist dann $e_{V_n}(v)\varphi \in C^1(\overline{I}, V_n^*)$ für alle $n \geq n_0$ mit $(e_{V_n}(v)\varphi)' = e_{V_n}(v)\varphi'$ in $C^0(\overline{I}, V_n^*)$. Mit Bemerkung 4.2 ist dann $e_{V_n}(v)\varphi \in W^{1,p'}(I, V_n^*)$ mit $\frac{de_{V_n}(v)\varphi}{dt} = e_{V_n}(v)\varphi'$ in $\mathbf{X}_{V_n}^*$, also $v\varphi \in \mathbf{W}_{V_n}$ mit $\frac{d_{e_{V_n}} v\varphi}{dt} = e_{V_n}(v)\varphi'$ in $\mathbf{X}_{V_n}^*$ nach Bemerkung 4.4 und damit eine zulässige Testfunktion für (2), welche insbesondere die verallgemeinerte partielle Integrationsformel in $\mathbf{W}_{V_n}$ (cf. Bemerkung 6.3 (iii)) erfüllt. Mit dieser und Testen von (2) mit $v\varphi \in \mathbf{X}_{V_n}$ erhält man für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_{V_n} \boldsymbol{y}_n, v\varphi \rangle_{\mathbf{X}_{V_n}} &= -\left\langle \frac{d_{e_{V_n}} \boldsymbol{y}_n}{dt}, v\varphi \right\rangle_{\mathbf{X}_{V_n}} \\ &= \langle e_{V_n}(v)\varphi', \boldsymbol{y}_n \rangle_{\mathbf{X}_{V_n}} - ((\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}} \boldsymbol{y}_n)(T), jv)_H \varphi(T) + (ja_n, jv)_H \varphi(0). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unter Beachtung von $\langle e_{V_n} v, \tilde{v} \rangle_{V_n} = \langle ev, \tilde{v} \rangle_V$ für alle $v, \tilde{v} \in V_n$ (cf. Bemerkung 6.3 (ii)) und $\langle \mathbf{A}_{V_n} \boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}} \rangle_{\mathbf{X}_{V_n}} = \langle \mathbf{A}\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}} \rangle_{\mathbf{X}}$ für alle $\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{X}_{V_n}$ (cf. Bemerkung 6.3 (iv)):

$$\langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, v\varphi \rangle_{\mathbf{X}} = \langle e(v)\varphi', \boldsymbol{y}_n \rangle_{\mathbf{X}} - ((\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}} \boldsymbol{y}_n)(T), jv)_H \varphi(T) + (ja_n, jv)_H \varphi(0).$$

Für $n \to \infty$ folgt unter Beachtung der in (3.1) aufgeführten Konvergenzen und $ja_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{y}_0$ in H, dass

$$\langle \boldsymbol{\xi}, v\varphi\rangle_{\mathbf{X}} = \langle e(v)\varphi', \boldsymbol{y}\rangle_{\mathbf{X}} - (\boldsymbol{y}_T, jv)_H\varphi(T) + (\boldsymbol{y}_0, jv)_H\varphi(0) \tag{$\triangle$}$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(I)$ folgt daraus, dass für alle $v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$

$$\langle e(v)\varphi', \boldsymbol{y}\rangle_{\mathbf{X}} = \langle \boldsymbol{\xi}, v\varphi\rangle_{\mathbf{X}}$$

erfüllt ist. Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in V liegt, folgt mit Lemma 5.4 und Bemerkung 5.5, dass $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ mit $\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} = -\boldsymbol{\xi}$ in $\mathbf{X}^*$. Nun kann man in ($\triangle$) gemäß Satz 5.6 mit $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ partiell integrieren und erhält wegen $\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} = -\boldsymbol{\xi}$ in $\mathbf{X}^*$, dass

$$((\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(T) - \boldsymbol{y}_T, jv)_H\varphi(T) = ((\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0) - \boldsymbol{y}_0, jv)_H\varphi(0) \text{ für alle } v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

Für $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T) = 0$ und $\varphi(0) = 1$ ist dann $(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0) = \boldsymbol{y}_0$ in H, da $j(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n)$ dicht in H liegt. Für $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(T) = 1$ erhält man analog, dass $(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(T) = \boldsymbol{y}_T$ in H.

Durch den Grenzübergang gegen einen nicht identifizierten Grenzwert, gelangte man nun an die Informationen, dass $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ mit $\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} = -\boldsymbol{\xi}$ in $\mathbf{X}^*$ und die Randwerte $(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(T) = \boldsymbol{y}_T$ und $(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0) = \boldsymbol{y}_0$ in H erfüllt sind. Diese Informationen fließen jetzt alle im letzten Schritt ein, um $\mathbf{A}\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{\xi}$ miteinander zu identifizieren:

3.3 Identifikation von $\mathbf{A}\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{\xi}$: Betrachtet man nun die für Galerkin-Lösungen geltende Ungleichung ($\square$) in (2.3) (iii) (a) für $\tau = 1$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}} \le -\frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2$$

Bilden des Limes superiors auf beiden Seiten liefert dann unter Beachtung der für eine beschränkte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ geltenden Identitäten (α) $\limsup_{n\to\infty}[b_n + c] = c + \limsup_{n\to\infty} b_n$ und (β) $\limsup_{n\to\infty} -b_n = -\liminf_{n\to\infty} b_n$, ($\gamma$) der schwachen Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_H$ und (δ) der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Bemerkung 5.7):

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \langle \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}} &\overset{(\alpha)}{\le} \limsup_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2\right] + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \\
&\overset{(\beta)}{=} -\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{V_n}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \overset{(\gamma)}{\le} -\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_T\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2 \\
&\overset{(3.2)}{=} -\frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0)\|_H^2 \overset{(\delta)}{=} -\left\langle \frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt}, \boldsymbol{y}\right\rangle_{\mathbf{X}} \overset{(3.2)}{=} \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y}\rangle_{\mathbf{X}}.
\end{aligned}$$

Mit der Bedingung (M) folgt schließlich, dass $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}$ in $\mathbf{X}^*$, also

$$\begin{aligned}
\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} + \mathbf{A}\boldsymbol{y} &= 0 \text{ in } \mathbf{X}^*, \\
(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz 6.4 vollständig. ■

Existenzsatz mit nichtseparablem V

Ziel ist es nun, die für separable Bildbereiche bewiesenen Resultate auf rein reflexive zu verallgemeinern.

Satz 6.5: Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $p' := \frac{p}{p-1}$, $\mathbf{X} := L^p(I, V)$ und $\mathbf{W} := W_e^{1,p,p'}(I, V, V^*)$. Des Weiteren gelte:

1. $\mathbf{A}_0 : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ist monoton.
2. $\mathbf{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ist beschränkt.
3. $\mathbf{A} := \mathbf{A}_0 + \mathbf{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ist koerziv und genügt der Bedingung (M).

Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in H$ und $\boldsymbol{f} \in \mathbf{X}^*$ eine Lösung $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ von (1).

Beweis: Es reicht erneut den Fall $\boldsymbol{f} = 0$ in $\mathbf{X}^*$ zu betrachten.

1. Galerkin-Approximation: Der Beweis wird wieder mit dem Galerkin-Ansatz gemäß Bemerkung 6.3 geführt. Dieses Mal steht jedoch Satz 6.4 zur Verfügung. Daher dient als Galerkin-Basis keine Folge endlichdimensionaler Unterräume, sondern ein System separabler Banachräume.

1.1 Galerkin-Basis: Definiere

$$\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0} := \left\{ U \subseteq V \mid (U, \|\cdot\|_V) \text{ separabler Banachraum, } \boldsymbol{y}_0 \in \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H} \right\}.$$

Da $R(j)$ dicht in H liegt, existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$, sodass $ja_n \overset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{y}_0$ in H. Durch $U := \overline{\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle}^{\|\cdot\|_V}$ ist dann ein separabler Banachraum mit $\boldsymbol{y}_0 \in \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}$ gegeben. Daher ist $\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ nichtleer. Ist nun $v \in V$, dann ist für beliebiges $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ offensichtlich $\overline{\langle v, U\rangle}^{\|\cdot\|_V} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$. Also ist $\bigcup_{U\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}} U = V$.

1.2 Galerkin-System: Da jedes $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ versehen mit $\|\cdot\|_V$ ein Banachraum mit $\boldsymbol{y}_0 \in \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}$ definiert, ist gemäß Bemerkung 6.3 (v) das Galerkin-System bezüglich $(\boldsymbol{y}_0, U)_{U\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}}$ wohldefiniert. Dann soll $\boldsymbol{y}_U \in \mathbf{W}_U$ **Galerkin-Lösung zu** U heißen, falls gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d_{e_U}\boldsymbol{y}_U}{dt} + \mathbf{A}_U\boldsymbol{y}_U &= 0 \text{ in } \mathbf{X}_U^* \\ (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_U}\boldsymbol{y}_U)(0) &= \boldsymbol{y}_0 \text{ in } \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist wieder $(U, \overline{j(U)}^{\|\cdot\|_H}, j_{|U})$ ein Evolutionstripel mit kanonischer Einbettung $e_U : U \to U^*$ (cf. Bemerkung 6.3 (ii)) und der Operator $\mathbf{A}_U$ die Einschränkung von $\mathbf{A}$ bezüglich $\mathbf{Id}_{\mathbf{X}_U}$ (cf. Bemerkung 6.3 (iv)). Auch die Räume $\mathbf{X}_U$, $\mathbf{W}_U$, die Ableitung $\frac{d_{e_U}}{dt}$ und die Auswahlfunktion $\mathbf{j}_{\mathbf{W}_U}$ sind wie in Bemerkung 6.3 (iii) zu verstehen.

2. Existenz der Galerkin-Lösungen und A-priori-Abschätzungen: Ziel ist es Satz 6.4 anzuwenden: Gemäß Bemerkung 6.3 (v) stellt (4) eine Evolutionsgleichung im Sinne von Definition 6.1 dar. Jedes $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ ist laut Definition separabel und ein abgeschlossener Unterraum von V, also reflexiv, da V als reflexiv vorausgesetzt wurde. Es gilt daher nur noch die Eigenschaften der eingeschränkten Operatoren zu prüfen:

Da $\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_U}$ isometrisch ist, liefert Lemma 2.9 mit der Definition der eingeschränkten Operatoren (cf. Bemerkung 6.3 (iv)), dass $(\mathbf{A}_0)_U := (\mathbf{A}_0)_{\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_U}} : \mathbf{X}_U \to \mathbf{X}_U^*$ monoton, $\mathbf{B}_U := \mathbf{B}_{\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_U}} : \mathbf{X}_U \to \mathbf{X}_U^*$ beschränkt und $\mathbf{A}_U := \mathbf{A}_{\mathrm{Id}_{\mathbf{X}_U}} : \mathbf{X}_U \to \mathbf{X}_U^*$ koerziv ist und der Bedingung (M) genügt. Schließlich sind alle Voraussetzungen von Satz 6.4 erfüllt und damit für jedes $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ die Existenz einer Galerkin-Lösung $\boldsymbol{y}_U \in \mathbf{W}_U$ zu U gesichert.

Testet man nun (4) mit $\boldsymbol{y}_U \in \mathbf{W}_U$, dann erhält man Wort für Wort wie in Satz 6.4 (2.3) (iii) (a) nur von $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{y}_0$ abhängende Konstanten $M, M' > 0$, sodass

$$\|\boldsymbol{y}_U\|_{\mathbf{X}} \leq M, \|\mathbf{A}\boldsymbol{y}_U\|_{\mathbf{X}^*} \leq M' \text{ und } \|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_U}\boldsymbol{y}_U)(T)\|_H \leq (2M(1+M'))^{\frac{1}{2}} =: M''.$$

3. Grenzübergang: Der Grenzübergang orientiert sich an dem Vorgehen in [Růž04, Kapitel 3, Satz 3.43], das vor allem auf folgendem topologischen Argument beruht:

Lemma: (Endliches Durchschnittsprinzip) *Eine Menge K ist genau dann kompakt, wenn jedes zentrierte System von in K abgeschlossenen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Dabei heißt ein System $\mathcal{K}$ zentriert, falls für beliebige $M_i \in \mathcal{K}$, wobei $i = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i \neq \emptyset.$$

Beweis: *Siehe [Růž04, Anhang: Lemma 1.3].* ■

3.1 Konstruktion des schwachen Grenzwerts: Definiere $\mathbf{K} := \mathbf{X} \times \mathbf{X}^* \times H$ und

$$\mathbf{L}_U := \{(\boldsymbol{y}_Z, \mathbf{A}\boldsymbol{y}_Z, (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_Z}\boldsymbol{y}_Z)(T))^T \in \mathbf{K} \mid \boldsymbol{y}_Z \text{ Galerkin-Lösung zu } Z \supseteq U\}.$$

Satz 6.4 sichert, dass $\mathbf{L}_U$ für alle $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ nichtleer ist. Nach Konstruktion ist $\mathbf{L}_U \subseteq \mathbf{L}_W$ für $W \subseteq U$. Dann ist aber auch $\emptyset \neq \mathbf{L}_{\overline{\langle U,W\rangle}^{\|\cdot\|_V}} \subseteq \mathbf{L}_U \cap \mathbf{L}_W$ für beliebige $U, W \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$, da wieder $\overline{\langle U,W\rangle}^{\|\cdot\|_V} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ und $\mathbf{L}_Z \neq \emptyset$ für alle $Z \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$. Induktiv erhält man, dass für beliebige $U_i \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$, wobei $i = 1, ..., n$ und $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{L}_{U_i} \neq \emptyset.$$

Damit ist insbesondere $(\overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\mathbf{K},\mathbf{K}^*)})_{U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}}$ ein zentriertes System schwach abgeschlossener Mengen. Die A-priori-Abschätzungen liefern, dass

$$\overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\mathbf{K},\mathbf{K}^*)} \subseteq B_M^{\mathbf{X}} \times B_{M'}^{\mathbf{X}^*} \times B_{M''}^{H} \text{ für alle } U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}.$$

Da $\mathbf{K}$ als Produktraum reflexiver Räume selbst wieder reflexiv ist, ist das zentrierte System $(\overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\mathbf{K},\mathbf{K}^*)})_{U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}}$ in einer schwach kompakten Teilmenge von $\mathbf{K}$ enthalten.

Schließlich liefert das endliche Durchschnittsprinzip, dass

$$\bigcap_{U\in\,\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}} \overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\mathbf{K},\mathbf{K}^*)} \neq \emptyset.$$

Das heißt, es existiert ein $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y}_T)^T \in \bigcap_{U\in\,\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}} \overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\mathbf{K},\mathbf{K}^*)}$.

3.2 Regularität und Anfangswerte: Für $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ beliebig, ist $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y}_T)^T \in \overline{\mathbf{L}_U}^{\tau(\mathbf{K},\mathbf{K}^*)}$. Da die Lösungsmengen $\mathbf{L}_U$ beschränkte Teilmengen von $\mathbf{K}$ sind, liefert Lemma A.7 die Existenz von Folgen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ mit $U \subseteq U_n$ und $((\boldsymbol{y}_n, \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{U_n}}\boldsymbol{y}_n)(T))^T)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{L}_U$, sodass gilt:

$$(\boldsymbol{y}_n, \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{U_n}}\boldsymbol{y}_n)(T))^T \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y}_T)^T \text{ in } \mathbf{K}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d_{e_{U_n}}\boldsymbol{y}_n}{dt} + \mathbf{A}_{U_n}\boldsymbol{y}_n = 0 \text{ in } \mathbf{X}^*_{U_n} \\ &\text{und } (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{U_n}}\boldsymbol{y}_n)(0) = \boldsymbol{y}_0 \text{ in } \overline{j(U_n)}^{\|\cdot\|_H}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ohne Beweis sei darauf hingewiesen, dass (5) schwache Konvergenz der Komponentenfolgen impliziert.

Für $u \in U \subseteq U_n$ und $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ ist analog zu Satz 6.4 (3.2) $u\varphi \in \mathbf{W}_{U_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also eine zulässige Testfunktion für (6) und erfüllt die verallgemeinerte partielle Integrationsformel in $\mathbf{W}_{U_n}$ (cf. Bemerkung 6.3 (iii)). Testet man nun (6) mit $u\varphi \in \mathbf{W}_{U_n}$, dann erhält man Wort für Wort wie in Satz 6.4 (3.2) die Identität:

$$\langle\boldsymbol{\xi}, u\varphi\rangle_{\mathbf{X}} = \langle e(u)\varphi\boldsymbol{\prime}, \boldsymbol{y}\rangle_{\mathbf{X}} - (\boldsymbol{y}_T, ju)_H\varphi(T) + (\boldsymbol{y}_0, ju)_H\varphi(0)$$

für alle $u \in U$, $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$. Wiederholt man die letzten Schritte für alle $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$, so erhält man die Gültigkeit für alle $u \in \bigcup_{U\in\,\mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}} U = V$. Mit derselben Argumentation wie in Satz 6.4 folgt dann wieder, dass $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ mit $\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} = -\boldsymbol{\xi}$ in $\mathbf{X}^*$, $(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(T) = \boldsymbol{y}_T$ und $(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0) = \boldsymbol{y}_0$ in H.

3.3 Identifikation von $\boldsymbol{\xi}$ und $\mathbf{A}\boldsymbol{y}$: Auch der letzte Schritt folgt im Wesentlichen analog zu Satz 6.4. Dabei reicht es nach der vorherigen Informationssammlung zum Grenzwert $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ eine Folge $((\boldsymbol{y}_n, \mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, (\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{U_n}}\boldsymbol{y}_n)(T))^T)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{L}_U$ zu einem beliebigen $U \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{y}_0}$ zu betrachten, die schwach gegen $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y}_T)^T \in \mathbf{K}$ konvergiert. Die Existenz solch einer Folge wurde bereits gesichert. Durch Testen von (6) mit $\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{W}_{U_n}$ erhält man analog zu Satz 6.4 (2.3) (iii) (a) für $\tau = 1$ die Abschätzung:

$$\langle\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}} \leq -\frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}_{U_n}}\boldsymbol{y}_n)(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_0\|_H^2$$

Daraus folgt wieder $\limsup_{n\to\infty}\langle\mathbf{A}\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_n\rangle_{\mathbf{X}} \leq \langle\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y}\rangle_{\mathbf{X}}$ und mit der Bedingung (M) $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}$ in $\mathbf{X}^*$, also schließlich:

$$\begin{aligned} &\frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} + \mathbf{A}\boldsymbol{y} = 0 \text{ in } \mathbf{X}^* \\ &(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0) = \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz 6.5 vollständig. ■

Folgerung 6.6: (Eindeutigkeit) Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 6.5 gelte, dass $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ strikt monoton ist. Dann existiert eine eindeutige Lösung von (1).

Beweis: Dieser Beweis ist in [Růž04, Kapitel 3, Satz 3.66] für triviale Anfangswerte zu finden, verläuft im allgemeinen Fall jedoch analog.

Angenommen es existieren zwei unterschiedliche Lösungen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ von (1) zu denselben Daten $\boldsymbol{f} \in \mathbf{X}^*$ und $\boldsymbol{y}_0 \in H$. Diese erfüllen dann insbesondere

$$\frac{d_e \boldsymbol{x}}{dt} + \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \text{ in } \mathbf{X}^*, \ \frac{d_e \boldsymbol{y}}{dt} + \mathbf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f} \text{ in } \mathbf{X}^* \text{ und } (\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{x})(0) = (\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0) = \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H$$

Testet man die Differenz der Operatordifferentialgleichungen mit $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbf{X}$, so erhält man mit der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Bemerkung 5.7) und der strikten Monotonie von $\mathbf{A}$, da $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ in $\mathbf{X}$ laut Annahme, dass

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \frac{d_e(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}{dt}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \right\rangle_{\mathbf{X}} + \langle \mathbf{A}\boldsymbol{x} - \mathbf{A}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle_{\mathbf{X}} \\
&> \left\langle \frac{d_e(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}{dt}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \right\rangle_{\mathbf{X}} \\
&= \frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{x})(T) - (\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{x})(0) - (\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(0)\|_H^2 \\
&= \frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{x})(T) - (\mathbf{j}_{\mathbf{W}}\boldsymbol{y})(T)\|_H^2 \geq 0
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Also muss die Lösung eindeutig sein. ■

Folgerung 6.7: Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $p' := \frac{p}{p-1}$, $\mathbf{X} := L^p(I, V)$ und $\mathbf{W} := W_e^{1,p,p'}(I, V, V^*)$. Des Weiteren gelte:

1. $\mathbf{A}_0 : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ist monoton und radialstetig.
2. $\mathbf{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ist stark stetig.
3. $\mathbf{A} := \mathbf{A}_0 + \mathbf{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ ist koerziv.

Dann existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in H$ und $\boldsymbol{f} \in \mathbf{X}^*$ eine Lösung $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ von (1).

Beweis: Da $\mathbf{B}$ stark stetig und $\mathbf{X}$ reflexiv ist, ist $\mathbf{B}$ kompakt (cf. Satz A.6), also insbesondere beschränkt. Nach Lemma 2.8 (i), (ii) genügt $\mathbf{A}$ außerdem der Bedingung (M). Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 6.5. ■

Bemerkung 6.8: Man kann in Folgerung 6.7 noch allgemeiner fordern, dass der Operator $\mathbf{B}$ pseudomonoton und beschränkt ist (cf. [Růž16, Kapitel 3, Definition 2.5]). Denn $\mathbf{A}_0$ ist als monotoner, radialstetiger Operator pseudomonoton. Dies ist in [Růž16, Kapitel 3, Lemma 2.6] für monotone, hemistetige Operatoren bewiesen. Der dortige Beweis funktioniert allerdings auch für monotone, radialstetige Operatoren. Damit ist $\mathbf{A} := \mathbf{A}_0 + \mathbf{B} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ als Summe pseudomonotoner Operatoren selbst pseudomonoton. Da pseudomonotone Operatoren insbesondere der Bedingung (M) genügen, sind damit alle Voraussetzungen von Satz 6.5 erfüllt.

Folgerung 6.9: (Existenzsatz für Operator-Familien) Sei (V, H, j) ein Evolutionstripel, V reflexiv, $I := (0,T)$, $0 < T < \infty$, $1 < p < \infty$, $p' := \frac{p}{p-1}$, $\mathbf{X} := L^p(I,V)$ und $\mathbf{W} := W_e^{1,p,p'}(I,V,V^*)$. Des Weiteren sei $\{A(t)\}_{t\in I}$ eine Operatorfamilie, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. $A(t) : V \to V^*$ ist für fast alle $t \in I$ wohldefiniert, monoton und radialstetig.
2. $A(\cdot)v : I \to V^*$ ist für alle $v \in V$ Bochner-messbar.
3. $\{A(t)\}_{t\in I}$ erfüllt die (p,p')-Majoranten-Bedingung.
4. Es existieren $\lambda \in L^1(I)$ und $M > 0$, sodass für fast alle $t \in I$ und alle $v \in V$ gilt:

$$\langle A(t)v, v\rangle_V \geq \lambda(t) + M\|v\|_V^p$$

Dann ist der durch $\{A(t)\}_{t\in I}$ induzierte Operator $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ wohldefiniert, beschränkt, demistetig, monoton und koerziv. Insbesondere existiert zu beliebigen $\boldsymbol{y}_0 \in H$ und $\boldsymbol{f} \in \mathbf{X}^*$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ von (1). Für separables V folgt 2. schon aus folgender Bedingung:

2*. $\langle A(\cdot)v, \tilde{v}\rangle_V : I \to \mathbb{R}$ ist für alle $v, \tilde{v} \in V$ Lebesgue-messbar.

Beweis:

1. **Existenz**: Folgerung 3.6 liefert sofort, dass $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ mit $(\mathbf{A}\boldsymbol{v})(t) := A(t)\boldsymbol{v}(t)$ wohldefiniert, monoton, beschränkt, demistetig und koerziv ist, also insbesondere der Bedingung (M) genügt. Satz 6.5 liefert nun die Existenz.

2. **Eindeutigkeit**: Der folgende Beweis stammt aus [GGZ74, Kap. VI, Satz 1.1]:

   Angenommen es existieren zwei Lösungen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$ von (1) zu denselben Daten $\boldsymbol{f} \in \mathbf{X}^*$ und $\boldsymbol{y}_0 \in H$. Diese erfüllen wieder

   $$\frac{d_e\boldsymbol{x}}{dt} + \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \text{ in } \mathbf{X}^*, \ \frac{d_e\boldsymbol{y}}{dt} + \mathbf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f} \text{ in } \mathbf{X}^* \text{ und } (\mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{x})(0) = (\mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{y})(0) = \boldsymbol{y}_0 \text{ in } H$$

   Testet man die Differenz der Operatordifferentialgleichungen mit $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})1_{[0,t]} \in \mathbf{X}$, wobei $t \in \overline{I}$ beliebig ist, so erhält man mit der Monotonie von $A(s)$ für fast alle $s \in I$ und der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (cf. Bemerkung 5.7), dass

   $$\begin{aligned}
   0 &= \left\langle \frac{d_e(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{dt}, (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})1_{[0,t]} \right\rangle_\mathbf{X} + \langle \mathbf{A}\boldsymbol{x} - \mathbf{A}\boldsymbol{y}, (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})1_{[0,t]}\rangle_\mathbf{X} \\
   &\geq \left\langle \frac{d_e(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{dt}, (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})1_{[0,t]} \right\rangle_\mathbf{X} \\
   &= \frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{x})(t) - (\mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{y})(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{x})(0) - (\mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{y})(0)\|_H^2 \\
   &\geq \frac{1}{2}\|(\mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{x})(t) - (\mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{y})(t)\|_H^2 \geq 0
   \end{aligned}$$

   Da $t \in \overline{I}$ beliebig gewählt war, muss $\mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{x} = \mathbf{j}_\mathbf{W}\boldsymbol{y}$ in $C^0(\overline{I}, H)$ gelten. Mit der Injektivität von $\mathbf{j}_\mathbf{W} : \mathbf{W} \to C^0(\overline{I}, H)$ (cf. Satz 5.6) folgt schließlich $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ in $\mathbf{W}$, also die Eindeutigkeit.

■

Appendix

Lemma A.1: (Teilfolgenargument) Sei (X, τ) ein topologischer Hausdorffraum und für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ existiere ein $x \in X$, welches Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ist. Dann gilt:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\to} x \text{ in } \tau.$$

Beweis: Angenommen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ konvergiere nicht gegen $x \in X$ bezüglich τ. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und eine offene Umgebung $A \in \tau$ von x, sodass $x_{\phi(n)} \notin A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch, da x Häufungspunkt von $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ist, also $x_{\phi(n)} \in A$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. ■

Lemma A.2: (Stauchungsoperator) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für beliebiges $r > 0$ der Operator $\mathbf{f}_r : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{f}_r(v) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \mathbf{f}(v) \leq r \\ \frac{r}{\mathbf{f}(v)} & \text{, falls } \mathbf{f}(v) > r \end{cases}$$

wieder stetig.

Beweis: Zunächst ist $\mathbf{f}_r$ wohldefiniert, da $\mathbf{f}_r(x) = 1$ für $\mathbf{f}(x) \leq r$, also nicht durch null geteilt wird. Es reicht Folgenstetigkeit zu prüfen. Es gelte $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in X. Man unterscheide die folgenden Fälle:

Fall 1: $x \in \{\mathbf{f} > r\} \cup \{\mathbf{f} < r\}$: Für $x \in \{\mathbf{f} > r\}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in \{\mathbf{f} > r\}$ für alle $n \geq n_0$, da $\{\mathbf{f} > r\}$ offen ist. Da $\mathbf{f}_r$ auf $\{\mathbf{f} > r\}$ stetig ist, folgt $\mathbf{f}_r(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} \mathbf{f}_r(x)$. Für $x \in \{\mathbf{f} < r\}$ argumentiert man analog.

Fall 2: $x \in \{\mathbf{f} = r\}$: Ohne Einschränkung sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{\mathbf{f} > r\}$, denn für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{\mathbf{f} \leq r\}$ gilt bereits $\mathbf{f}_r(x_n) = 1 = \mathbf{f}_r(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließlich gilt, dass

$$|\mathbf{f}_r(x_n) - \mathbf{f}_r(x)| = r \left| \frac{1}{\mathbf{f}(x_n)} - \frac{1}{\mathbf{f}(x)} \right| \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

da $\frac{1}{\mathbf{f}}$ auf $\{\mathbf{f} \geq r\}$ stetig ist. ■

Lemma A.3: (Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren) Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum und $M \subseteq H$ abzählbar. Dann existiert ein Orthonormalsystem $\{\varphi_j \mid j \in J\} \subseteq H$ mit $J \subseteq \mathbb{N}$, sodass $\langle \varphi_j \mid j \in J\rangle = \langle M\rangle$.

Beweis: Siehe [Růž15, Lemma 5.2]. ■

Lemma A.4: (Verallgemeinerte Fourierreihe) Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum, $\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem, d.h. es gilt:

$$\overline{\langle \varphi_j \mid j \in \mathbb{N}\rangle}^{\|\cdot\|_H} = H \text{ und } (\varphi_i, \varphi_j)_H = \begin{cases} 1, \text{ für } i = j \\ 0, \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

Sei außerdem $H_n := \langle \varphi_j \mid j = 1, ..., n \rangle$. Dann gilt für die Projektionsoperatoren $P_n : H \to H_n$ mit

$$P_n(h) := \sum_{i=1}^{n} (h, \varphi_i)_H \varphi_i,$$

dass $P_n(h) \overset{n\to\infty}{\to} h$ in H und $\|P_n(h)\|_H \leq \|h\|_H$.

Beweis: Siehe [Růž15, Lemma 5.4 und Satz 5.5]. ■

Lemma A.5: (Konvergenzsatz von Vitali) Sei $1 \leq p < \infty$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I)$ konvergiere punktweise fast überall gegen eine Lebesgue-messbare Funktion f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ in $L^p(I)$.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I)$ ist p-gleichgradig integrierbar.

Beweis: Siehe [Růž10, Satz 9.13]. ■

Satz A.6: (Eberlein-Šmulian) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$.

Beweis: Siehe [Růž15, Satz 7.17]. ■

Lemma A.7: Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum und $M \subset X$ eine beschränkte Teilmenge. Dann gibt es für alle $x \in \overline{M}^{\tau(X,X^*)}$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$, sodass

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ in } X.$$

Beweis: Siehe [Růž04, Anhang: Lemma 8.17]. ■

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel verwendet habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe. Darüber hinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, bereits für eine andere Prüfung angefertigt wurde.

Freiburg, den 16. Januar 2019

Literatur

[Em04] E. Emmrich. Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen: Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende. Vieweg, Wiesbaden, 2004.

[SND16] F. Schmitz, P. Nägele und J. Daube. Skript zur Vorlesung Bochner-Räume. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Wintersemester 2015/16, Stand: 18. März 2016.

[Růž04] M. Růžička. Nichtlineare Funktionalanalysis: Eine Einführung. Springer, Berlin, 2004.

[Růž10] M. Růžička. Skript zur Vorlesung Analysis III. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Wintersemester 2009/10.

[Růž15] M. Růžička. Skript zur Vorlesung Funktionalanalysis. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Sommersemester 2015.

[Růž16] M. Růžička. Skript zur Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Wintersemester 2016/17.

[GGZ74] H. Gajewski, K. Gröger und K. Zacharias. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[Edw65] R. E. Edwards. Functional Analysis: Theory and Applications. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

[BF06] F. Boyer und P. Fabrie. Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles. Mathématiques & Applications 52. Springer-Verlag, Berlin, 2006.